math ✓

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, O. Haupt,
G. Köthe, W. Schmeidler

Band 198

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1957

Archiv-Nr. 180357
Satz von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Druck von Buchkunst, Berlin W 35
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 198

Seite

Bergström, Harald, On the Limit Theorems for Convolutions of Distributions Functions. I 121

Bögel, K., Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. III . 73

Gaschütz, Wolfgang, Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist . 87

Halberg, Charles J. A., siehe **Angus E. Taylor**

van Heemert, A., Cyclic permutations with sequences and related problems 56

Hodges, John H., Distribution of Bordered Matrices in a Finite Field 10

Hoehnke, Hans-Jürgen, Lösung eines Problems von Ch. Hopkins 112

İçen, Orhan S., Eine Verallgemeinerung und Übertragung der Schneiderschen Algebraizitätskriterien ins p-adische mit Anwendung auf einen Transzendenzbeweis im p-adischen 28

Meyer, C., Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen 143

Mitas, Günter, Zur Strukturtheorie separabler Algebren 1

Ostrowski, Alexander, Über die Evoluten von endlichen Ovalen 14

Rühs, Fritz, Über die einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Produkte . 81

Schulz-Arenstorff, Richard, Über die zweidimensionale Verteilung der Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Restklassen 204

Taylor, Angus E. and **Charles J. A. Halberg,** General theorems about a bounded linear operator and its conjugate 93

Volkmann, Bodo, Einige Sätze über k-freie Zahlen 7

Ausgabedaten der Hefte von Bd. 198

Heft 1/2 ausgegeben am 5. August 1957

Heft 3/4 ausgegeben am 1. Dezember 1957

Zur Strukturtheorie separabler Algebren.

Von *Günter Mitas* in Hamburg.

Will man die Theorie halbeinfacher Algebren aufbauen, also etwa die Wedderburnschen Struktursätze beweisen, so benötigt man dazu Begriffe aus der Theorie beliebiger Algebren, wie Radikal, eigentlich nilpotent usw., die nur um ihres Ausschlusses willen definiert werden. In dieser Note wird daher versucht, die Theorie halbeinfacher Algebren unter Vermeidung derartiger Begriffe aufzubauen. So wird der erste Wedderburnsche Struktursatz (*eine halbeinfache Algebra besitzt ein Einselement und ist direkte Summe einfacher Algebren*), allerdings etwas abgeschwächt, fast ohne obige nicht in eine Theorie halbeinfacher Algebren gehörenden Begriffe bewiesen. Die Anregung hierzu verdanke ich Herrn Professor Hasse.

Überdies ist es bei einer Voraussetzung an den Grundkörper möglich, den Beweis konstruktiv zu führen und somit die direkte Summenzerlegung der Algebren in endlich vielen Schritten rechnerisch herzustellen.

§ 1. Das Hauptpolynom einer Algebra.

1. Gegeben sei ein explizit bekannter Körper Ω. Der Begriff „explizit bekannt" ist in [5] § 1, 1 erklärt, es wird etwas weniger als von v. d. Waerden [8] und M. Kneser [1] gefordert.

Über Ω sei weiter eine Algebra $\mathfrak{A}$ vom Range n gegeben. Die Elemente $u_1, \ldots, u_n$ seien Basiselemente von $\mathfrak{A}/\Omega$.

2. In diesem und im nächsten Paragraphen wird über Indizes, die in einem Ausdruck oben und unten vorkommen, von 1 bis n summiert, einfach vorkommende Indizes durchlaufen unabhängig voneinander die Werte von 1 bis n (in Analogie zur Tensor-Algebra. Das Transformationsverhalten und invariante Aussagen werden durch diese Schreibweise ersichtlich). Die i-te Potenz der Unbestimmten ζ wird mit ζ^i, die i-te Potenz eines Elements a bzw. einer Matrix M wird mit $(a)^i$ bzw. $(\mathsf{M})^i$ bezeichnet.

3. Durch Adjunktion von n unabhängigen Unbestimmten ξ^i wird Ω zu $\mathsf{K} = \Omega(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ erweitert und das in $\mathfrak{A}_{\mathsf{K}}$ gelegene Element $x = \xi^i u_i$ (*allgemeines Element*) gebildet. Ist

$$\zeta R_x(\zeta) = \zeta R(\zeta, \xi^i) = \zeta^{m+1} + \varphi_1(\xi^i)\,\zeta^m + \cdots + \varphi_m(\xi^i)\,\zeta \quad (\text{mit } \varphi_k(\xi^i) = \varphi_k(\xi^1, \ldots, \xi^n))$$

das normierte Polynom niedrigsten Grades aus $\zeta\mathsf{K}[\zeta]$, das x als Nullstelle hat, so heißt das Polynom $R_x(\zeta) = R(\zeta, \xi^i)$ das *Hauptpolynom von* $\mathfrak{A}$. Das Polynom $R_x(\zeta)$ kann durch ein lineares Gleichungssystem bestimmt werden. — Für ein Element $a = \alpha^i u_i$ heißt das Polynom $R_a(\zeta) = R(\zeta, \alpha^i) = \zeta^m + \varphi_1(\alpha^i)\,\zeta^{m-1} + \cdots + \varphi_m(\alpha^i)$ [1]) das *Hauptpolynom des Elements* a. Es ist a Nullstelle von $\zeta R_a(\zeta)$. Die Polynome $R_x(\zeta)$ und $R_a(\zeta)$ sind von der zugrunde gelegten Basis unabhängig.

[1]) Daß $R(\zeta, \xi^i)$ ein Polynom (und nicht nur eine rationale Funktion) in den ξ^i und somit $R(\zeta, \alpha^i)$ bildbar ist, folgt gleich unten.

Ist $F_x(\zeta)$ das charakteristische Polynom von x, so ist bekanntlich x Nullstelle von $\zeta F_x(\zeta)$. Es gilt daher $\zeta R_x(\zeta) \mid \zeta F_x(\zeta)$ und somit

$$R_x(\zeta) \mid F_x(\zeta) \text{ und } R_a(\zeta) \mid F_a(\zeta). \tag{1. 1}$$

Nun ist $F_x(\zeta)$ als Polynom in ζ normiert und als Polynom in $\zeta, \xi^1, \ldots, \xi^n$ homogen. Da $R_x(\zeta)$ ebenfalls als Polynom in ζ normiert ist, ist unter Anwendung des Gaußschen Satzes auch $R_x(\zeta)$ ein Polynom in $\zeta, \xi^1, \ldots, \xi^n$ und als solches homogen. Folglich ist $\varphi_1(\xi^i)$ in ξ^i linear, $\varphi_1(\xi^i) = -\gamma_i \xi^i$. — Die Funktion

$$\mathfrak{Sp}(a) = -\varphi_1(\alpha^i) = \gamma_i \alpha^i \tag{1. 2}$$

heißt *Hauptspur* oder kurz *Spur* des Elements $a = \alpha^i u_i$. Offenbar gilt

$$\mathfrak{Sp}(\alpha a + \beta b) = \alpha\, \mathfrak{Sp}(a) + \beta\, \mathfrak{Sp}(b) \tag{1. 3}$$

für a, b aus $\mathfrak{A}$ und α, β aus Ω.

4. Für ein nilpotentes Element a aus $\mathfrak{A}$ gilt der

Satz 1. 1. *Die Spur eines nilpotenten Elements a aus $\mathfrak{A}$ verschwindet.*

Dieser Satz folgt aus dem allgemeineren

Satz 1. 2. *Ist das Element a aus $\mathfrak{A}$ nilpotent, so haben das charakteristische bzw. das Hauptpolynom von a die Form*

$$F_a(\zeta) = \zeta^n \text{ bzw. } R_a(\zeta) = \zeta^m.$$

Der Beweis von Satz 1. 2 wird wegen (1. 1) für $F_a(\zeta)$ geführt.

Ist $\mathsf{M}_a = (\alpha_i^k)_{ik}$ die Matrix der regulären Darstellung von a, so ist mit $(a)^r = 0$ auch $(\mathsf{M}_a)^r = 0$ und die Determinante von M_a verschwindet. Daher gibt es einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor σ_1^l mit $\sigma_1^l \alpha_l^k = 0$. Wird σ_1^l zu einer regulären Matrix $\Sigma = (\sigma_i^l)_{il}$ ergänzt, so ist

$$\Sigma \mathsf{M}_a \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ * & \\ \cdot & \mathsf{M}_a^{(1)} \\ \cdot & \\ * & \end{pmatrix}.$$

Mit $(\mathsf{M}_a)^r = 0$ ist auch $(\mathsf{M}_a^{(1)})^r = 0$. Somit kann dieses Verfahren fortgesetzt werden; es entsteht durch eine reguläre Transformation eine Matrix

$$\Sigma^* \mathsf{M}_a \Sigma^{*-1} = \mathsf{M}_a^*,$$

die in und oberhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen enthält. Aus der Invarianz des charakteristischen Polynoms bei regulärer Transformation folgt die Behauptung.

§ 2. Die Separabilität von Algebren.

1. Gegeben sei eine Algebra $\mathfrak{A}$ vom Range n über dem explizit bekannten Grundkörper Ω. Eine Basis von $\mathfrak{A}/\Omega$ sollen die Elemente u_i mit $u_i u_k = \gamma_{ik}^l u$ bilden. Die Matrix

$$\Gamma = (\mathfrak{Sp}(u_i u_k))_{ik} = (\gamma_l \gamma_{ik}^l)_{ik} = (\gamma_{ik})_{ik}$$

heißt die *Hauptdiskriminantenmatrix* (kurz *Diskriminantenmatrix*) von $\mathfrak{A}/\Omega$ bezüglich der Basis u_i, die Determinante dieser Matrix heißt *Hauptdiskriminante* (kurz *Diskriminante*) von $\mathfrak{A}/\Omega$ bezüglich der Basis u_i. Bei einer Basistransformation multipliziert sich die Diskriminante mit dem Quadrat der Transformationsmatrix. Somit ist folgende Definition von der Basis unabhängig.

Definition. *Eine Algebra $\mathfrak{A}$ mit der Basis u_i über Ω heißt separabel (genauer: hauptseparabel), wenn die Diskriminantenmatrix*

$$\Gamma = (\mathfrak{sp}(u_i u_k))_{ik}$$

regulär ist.

Diese Begriffsbildung ist auch invariant, wenn zu einem Ω umfassenden Grundkörper übergegangen wird. Die Definition stimmt mit der üblichen Definition der Separabilität (halbeinfach und bei jeder Grundkörpererweiterung halbeinfach) überein. Dies ist bei Kenntnis der Wedderburnschen Struktursätze leicht einzusehen.

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_t$ die direkte Summe der Algebren $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_t$, so gilt der

Satz 2. 1. *Die Algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_t$ ist genau dann separabel, wenn jede der Algebren $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_t$ separabel ist.*

Dieser Satz folgt daraus, daß bei geeigneter Basis von $\mathfrak{A}$ die Diskriminantenmatrix von $\mathfrak{A}$ sich diagonal aus den Diskriminantenmatrizen der Algebren $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_t$ zusammensetzt. Dabei ist zu beachten, daß die in $\mathfrak{A}_i$ gebildete Spur eines Elements aus $\mathfrak{A}_i$ gleich der in $\mathfrak{A}$ gebildeten Spur dieses Elements ist. Dies folgt daraus, daß das Hauptpolynom von $\mathfrak{A}$ das Produkt der Hauptpolynome der Algebren $\mathfrak{A}_i$ ist, gegebenenfalls (wenn $\mathfrak{A}$ kein Einselement besitzt) dividiert durch eine gewisse Potenz von ζ. Letzteres ist unschwer zu sehen.

2. Weiter gilt (Frobenius [2], 507, MacDuffee [4], 297) der

Satz 2. 2. *Jede separable Algebra $\mathfrak{A}$ besitzt ein Einselement.*

Sei zum Beweise

$$\mathfrak{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon^n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g} = \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma^n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha^n \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{-1} = (\gamma^{ik})_{ik}, \quad \mathfrak{e}' = (\varepsilon^1 \ldots \varepsilon^n) \text{ usw.}$$

Ist dann $e = \varepsilon^i u_i = \mathfrak{e}'\mathfrak{u}$ eine Linkseins von $\mathfrak{A}$, so gilt $e\mathfrak{u}' = \mathfrak{e}'\mathfrak{u}\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}'$. Hieraus folgt durch Spurbildung $\mathfrak{e}'\Gamma = \mathfrak{g}'$, so daß eine Linkseins von $\mathfrak{A}$ notwendig von der Form $e = \gamma_i \gamma^{ik} u_k = \mathfrak{g}'\Gamma^{-1}\mathfrak{u}$ sein muß.

Sei nun $a = \alpha^i u_i = \mathfrak{a}'\mathfrak{u}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{A}$. Mit den regulären bzw. antistrophen Darstellungsmatrizen M_a bzw. N_a von a gilt dann $\mathfrak{u}a = \mathsf{M}_a\mathfrak{u}$ bzw. $a\mathfrak{u} = \mathsf{N}_a\mathfrak{u}$, so daß der Ausdruck $\mathfrak{u}a\mathfrak{u}'$ einerseits gleich $\mathsf{M}_a\mathfrak{u}\mathfrak{u}'$, anderseits gleich $\mathfrak{u}\mathfrak{u}'\mathsf{N}_a'$ ist. Hieraus folgt durch Spurbildung die *2. Frobeniussche Relation* $\mathsf{M}_a\Gamma = \Gamma\mathsf{N}_a'$. Es gilt dann der Reihe nach

$$ea = \mathfrak{g}'\Gamma^{-1}\mathfrak{u}\mathfrak{a} = \mathfrak{g}'\Gamma^{-1}\mathsf{M}_a\mathfrak{u} = \mathfrak{g}'\mathsf{N}_a'\Gamma^{-1}\mathfrak{u},$$

und daraus folgt weiter wegen

$$\mathfrak{g}'\mathsf{N}_a' = (\gamma_1 \cdots \gamma_n)(\alpha^l \gamma^i_{lk})_{ik} = (\alpha^l \gamma_i \gamma^i_{lk})_k = (\alpha^1 \cdots \alpha^n)(\gamma_l \gamma^i_{ik})_{lk} = \mathfrak{a}'\Gamma$$

schließlich

$$ea = \mathfrak{a}'\Gamma\Gamma^{-1}\mathfrak{u} = \mathfrak{a}'\mathfrak{u} = a.$$

Ebenso folgt die Existenz einer Rechtseins und damit eines Einselements überhaupt.

3. Wie in der Riemannschen Geometrie mit Hilfe des metrischen Fundamentaltensors g_{ik}, so lassen sich hier mit Hilfe der regulären symmetrischen Hauptdiskriminantenmatrix $\Gamma = (\gamma_{ik})_{ik}$ und deren Inverser $\Gamma^{-1} = (\gamma^{ik})_{ik}$ (der Beweis von $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$, der etwas Rechnung erfordert, wird hier übergangen) aus Ausdrücken mit oberen Indizes Ausdrücke mit unteren Indizes bilden und umgekehrt. So wird $u^i = \gamma^{ik} u_k$ und $\gamma^i = \gamma^{ik}\gamma_k$ gewonnen. Dies liefert dann die Invarianten

$$h = u^i u_i \quad \text{und} \quad e = \gamma^i u_i.$$

Ist Γ die reguläre Diskriminantenmatrix und γ_i die reguläre Spur von u_i (die reguläre Spur eines Elements a aus $\mathfrak{A}$ ist die Spur der regulären Darstellungsmatrix M_a von a. Die reguläre Diskriminantenmatrix entsteht aus der Hauptdiskriminantenmatrix dadurch, daß die Hauptspur durch die reguläre Spur ersetzt wird. Siehe [5], § 1, 1), so ist h das von Hasse [3] konstruierte Einselement; e ist auch in diesem Falle das Einselement von $\mathfrak{A}$ (in den Beweis von Satz 2. 2 geht nur die Linearität der Spurfunktion und die Regularität von Γ ein).

In unserem Falle (d. h. mit Γ als Hauptdiskriminantenmatrix und mit $\gamma_i = \mathfrak{Sp}(u_i)$) ist h ein von der Struktur der Algebra abhängiges Element. Ist $\mathfrak{A}$ eine volle Matrixalgebra vom Grade n und dem Einselement e, so ist die von Hasse konstruierte Invariante

$$h = ne. \tag{2. 1}$$

Der Beweis von (2. 1) geht davon aus, daß die Hauptspur eines Elements aus $\mathfrak{A}$ gleich der Matrixspur dieses Elements ist. Bilden die Elemente $e_{ii'}$ mit $e_{ii'}e_{kk'} = \delta_{i'k}e_{ik'}$ eine Basis von $\mathfrak{A}/\Omega$, so ist

$$\Gamma = (\delta_{ik'}\delta_{i'k})_{ii',kk'}, \quad \Gamma^{-1} = (\delta^{ik'}\delta^{i'k})_{ii',kk'}$$

(i, i' Zeilenindizes, k, k' Spaltenindizes, in gleicher Weise geordnet). Hieraus folgt

$$h = e_{ii'}\delta^{ik'}\delta^{i'k}e_{kk'} = \delta^{ik'}\delta^{i'k}\delta_{i'k}e_{ik'} = \delta^{ik'}ne_{ik'} = ne.$$

Ist $\mathfrak{A}$ eine direkte Summe von einfachen separablen Algebren $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_t$, so ist mit $m_i = \text{Rang}\,\mathfrak{A}_i/\text{Grad}\,\mathfrak{A}_i$, $e_i =$ Einselement von $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, t)$

$$h = m_1e_1 + \cdots + m_te_t.$$

Dies ist leicht zu sehen.

§ 3. Der Beweis des ersten Wedderburnschen Struktursatzes.

1. Gegeben sei eine separable Algebra $\mathfrak{A}$ über dem explizit bekannten Grundkörper Ω. Über Ω sei zusätzlich vorausgesetzt, daß sich jedes mit seiner Ableitung teilerfremde Polynom $f(\zeta)$ über Ω in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen läßt.

Zum Beweis des Struktursatzes werden die orthogonalen, im Zentrum $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ orthogonal unzerlegbaren Idempotente von $\mathfrak{Z}$ konstruiert. $\mathfrak{Z}$ ist eine Algebra über Ω und läßt sich durch Auflösen eines linearen Gleichungssystems gewinnen. $\mathfrak{Z}$ enthält das Einselement von $\mathfrak{A}$ (das nach Satz 2. 2 existiert). Für die Elemente v von $\mathfrak{Z}$ gilt der

Hilfssatz. *In einer separablen Algebra $\mathfrak{A}$ ist das Minimalpolynom $f(\zeta)$ eines Zentrumselements v mit seiner Ableitung teilerfremd.*

Beweis. 1. Ein Polynom $f(\zeta)$ ist entweder mit seiner Ableitung teilerfremd oder es besitzt einen inkonstanten Teiler der Form $d(\zeta)^2$ oder es besitzt (bei Charakteristik p) einen Teiler der Form $d(\zeta) = g(\zeta^p)$. Dies stellt man durch ggT-Bildungen leicht fest. — 2. Ist $f(\zeta) = f_1(\zeta)\,d(\zeta)^2$, so ist das Element $a = f_1(v)\,d(v) \neq 0$ aus $\mathfrak{Z}$ nilpotent. Wird a als erstes Basiselement von $\mathfrak{A}$ gewählt, so enthält die Diskriminantenmatrix von $\mathfrak{A}$ nach Satz 1. 1 in der ersten Zeile lauter Nullen, kann also nicht regulär sein. — 3. Ist $f(\zeta) = f_1(\zeta)\,g(\zeta^p)$, so wird der explizit bekannte Körper Λ konstruiert, der Ω enthält und in dem die Koeffizienten von $g(\zeta^p)$ p-te Wurzeln besitzen. (Die Konstruktion von Λ, die unschwer durchzuführen ist, wird hier übergangen.) In $\Lambda[\zeta]$ ist dann $g(\zeta^p) = h(\zeta)^p$ und das Element $a = f_1(v)\,h(v) \neq 0$ aus $\mathfrak{Z}_\Lambda$ ist wieder nilpotent. Da die Separabilität von $\mathfrak{A}$ invariant gegenüber Übergang zu einem Ω umfassenden Körper ist, ist auch in diesem Falle $\mathfrak{A}$ nicht separabel.

2. Sei nun $v \neq 0$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{Z}$, etwa das erste Basiselement von $\mathfrak{Z}$. Ohne Beschränkung kann angenommen werden, daß das Minimalpolynom von v nicht linear ist. Ist nämlich der Rang r von $\mathfrak{Z}$ gleich 1, so sind wir mit unserer Konstruktion fertig, andernfalls hat wenigstens ein Basiselement von $\mathfrak{Z}$ ein nichtlineares Mininalpolynom.

Ist dann das zu v gehörende Minimalpolynom $f(\zeta)$ reduzibel,

$$f(\zeta) = f_1(\zeta) \cdots f_s(\zeta) \qquad (s > 1),$$

so sind die Primpolynome $f_i(\zeta)$ mit ihren Ableitungen teilerfremd und voneinander verschieden. Dies ist durch ggT-Bildung leicht zu sehen. Es gibt dann Polynome $\chi_1(\zeta), \ldots, \chi_s(\zeta)$ derart, daß mit

$$\varepsilon_i(\zeta) = \chi_i(\zeta) f(\zeta) f_i(\zeta)^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

die Relation

$$\varepsilon_1(\zeta) + \cdots + \varepsilon_s(\zeta) = 1$$

besteht. Wird $e_i = \varepsilon_i(v) \neq 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ gesetzt, so gilt

$$e_i e_k = \delta_{ik} e_i, \quad e_1 + \cdots + e_s = e.$$

Demgemäß spaltet sich $\mathfrak{Z}$ selbst in eine direkte Algebrensumme auf, wobei die Ränge der einzelnen Komponenten kleiner als r sind. An diesen Komponenten wird dann weitergearbeitet.

Ist dagegen das zu v gehörige Minimalpolynom $f(\zeta)$ vom Grade $k > 1$ irreduzibel, so erzeugt v in $\mathfrak{Z}$ einen endlich-algebraischen Erweiterungskörper $\mathfrak{Z}_1$ vom Grade k. Es wird an der Algebra $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}_1$, die einen kleineren Rang als r hat, weitergearbeitet. $\mathfrak{Z}_1$ ist nach [5], Satz 1. 1 separabel[2]), da $f(\zeta)$ mit seiner Ableitung teilerfremd ist. Nach [6], Satz 2b lassen sich auch über $\mathfrak{Z}_1$ alle mit ihrer Ableitung teilerfremden Polynome in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen. Da zudem der Hilfssatz auch für Minimalpolynome über $\mathfrak{Z}_1$ von Elementen v aus $\mathfrak{Z}$ gilt, sind für $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}_1$ dieselben Betrachtungen wie für $\mathfrak{Z}/\Omega$ möglich.

Spaltet sich $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}_1$ in eine direkte Algebrensumme auf, so auch $\mathfrak{Z}/\Omega$. Erhält man dagegen einen endlich-algebraischen Erweiterungskörper $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{Z}_1$, so ist zunächst nach [5], Satz 1. 1 die Algebra $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{Z}_1$ separabel; nach [5], Satz 2. 3 ist dann auch $\mathfrak{Z}_2/\Omega$ separabel, so daß an $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}_2$ weitergearbeitet werden kann.

So kommt man nach endlich vielen Schritten zu einer Zerlegung der Eins von $\mathfrak{A}$ in orthogonale, in $\mathfrak{Z}$ orthogonal unzerlegbare Idempotente,

$$e = e_1 + \cdots + e_t, \quad e_i e_k = \delta_{ik} e_i,$$

zu einer Zerlegung des Zentrums $\mathfrak{Z}$ in eine direkte Summe von über Ω separablen Körpern,

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}e = \mathfrak{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{Z}e_t = \mathfrak{Z}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{Z}_t,$$

und zu einer Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in eine direkte Summe von (nach Satz 2. 1) separablen Algebren

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}e = \mathfrak{A}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}e_t = \mathfrak{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_t. \tag{3. 1}$$

Dabei sind bekanntlich die Zentren der Summanden $\mathfrak{A}_i$ gerade die Algebren $\mathfrak{Z}_i$. Da die Idempotente e_i im Zentrum unzerlegbar sind, sind auch die Algebren $\mathfrak{A}_i$ direkt unzerlegbar. Da eine direkte Zerlegung einer Algebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement in direkt unzerlegbare Summanden bekanntlich eindeutig ist, ist mit (3. 1) gerade die Zerlegung des ersten Struktursatzes von Wedderburn [7] gewonnen.

---

[2]) Für Algebren, die von einem Element erzeugt werden, fallen die Begriffe „separabel" und „regulär-separabel" zusammen. Dies ist leicht zu sehen.

3. Um die Konstruktion der Zerlegung (3. 1) durchführen zu können, ist es nicht nur hinreichend, wie in **2** gezeigt, sondern zugleich auch notwendig, daß sich jedes mit seiner Ableitung teilerfremde Polynom über dem Grundkörper Ω in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen läßt.

Sei in diesem Punkt also Ω ein explizit bekannter Körper, über den zusätzlich vorausgesetzt sei, daß sich von jeder separablen Algebra $\mathfrak{A}/\Omega$ die Zerlegung (3. 1) in endlich vielen Schritten herstellen läßt. Dann behaupten wir, daß sich jedes mit seiner Ableitung teilerfremde Polynom $f(\eta)$ über Ω in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen läßt.

Beweis. Sei $f(\eta)$ das mit seiner Ableitung teilerfremde, in Primpolynome zu zerlegende Polynom. Wir betrachten die Algebra $\mathfrak{A} = \Omega[\eta] \bmod f(\eta)$. Diese Algebra ist nach [5], Satz 1. 1 separabel, so daß sich voraussetzungsgemäß die orthogonalen und orthogonal unzerlegbaren Idempotente $e_1, \ldots, e_t$ mit $e = 1 \bmod f(\eta) = e_1 + \cdots + e_t$ konstruieren lassen. Sind dann $\varepsilon_i(\eta)$ irgendwelche Repräsentanten der Restklassen $e_i = \varepsilon_i(\eta) \bmod f(\eta)$, so ist mit

$$f_i(\eta) = \frac{f(\eta)}{(f(\eta),\ \varepsilon_i(\eta))} \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

die Primpolynomzerlegung von $f(\eta)$ durch $f(\eta) = f_1(\eta) \cdots f_t(\eta)$ gegeben. Dies ist mittels der Relationen $f(\eta) \mid \varepsilon_i(\eta)\, \varepsilon_k(\eta)$ $(i \neq k)$ und $f(\eta) \mid \varepsilon_1(\eta) + \cdots + \varepsilon_t(\eta) - 1$ unschwer zu ersehen.

4. Zusammenfassend ergibt sich damit der (Wedderburnsche)

Struktursatz. *Jede separable Algebra $\mathfrak{A}$ über dem explizit bekannten Grundkörper Ω ist direkte Algebrensumme von eindeutig bestimmten, direkt unzerlegbaren separablen Algebren $\mathfrak{A}_i$, deren Zentren separable Erweiterungskörper von Ω sind.*

Diese Algebren können genau dann in endlich vielen Schritten konstruiert werden, wenn sich jedes mit seiner Ableitung teilerfremde Polynom über Ω in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen läßt.

H. Weyl [9] hat durch andersartige Gedankengänge eine Theorie halbeinfacher, insbesondere einfacher Algebren aufgebaut, die ebenfalls die für halbeinfache Algebren leeren Begriffe vermeidet.

Literatur.

[1] *M. Kneser*, Bemerkung über die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten. Math. Zeitschr. **57** (1953), 238—240.

[2] *G. Frobenius*, Theorie der hypercomplexen Größen. I. Ber. der Akad. Berlin **1903**, 504—537.

[3] *H. Hasse*, Algebren. Vorlesung Wintersemester 1934/35 in Göttingen (Ausarbeitung im Math. Inst. Göttingen).

[4] *C. C. MacDuffee*, Modules and ideals in a Frobenius algebra. Monatshefte für Math. und Phys. **48** (1939), 293—313.

[5] *G. Mitas*, Bemerkungen zur Algebrentheorie. Journ. f. d. r. u. ang. Math. **197** (1957), 68—75.

[6] *G. Mitas*, Über Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten. Journ. f. d. r. u. ang. Math. **197** (1957), 76—81.

[7] *M. Wedderburn*, On hypercomplex numbers. London Math. Soc. Proc. (2) **6** (1908), 77—118.

[8] *B. v. d. Waerden*, Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen. Math. Ann. **102** (1930), 738—739

[9] *H. Weyl*, Generalized Riemann matrices and factor sets. Ann. of Math. (2) **37** (1936), 709—745.

Eingegangen 27. Juli 1955.

Einige Sätze über k-freie Zahlen.

Von *Bodo Volkmann* in Mainz.

Für jede natürliche Zahl a sei, wenn $k \geqq 2$ eine feste ganze Zahl ist, die Zerlegung $a = t_k(a)\, P_k(a)^k$ so definiert, daß $P_k(a)^k$ die größte k-te Potenz ist, die als Faktor von a auftritt. Zahlen a mit $P_k(a) = 1$ nennen wir in der üblichen Bezeichnung k-frei; die Menge aller k-freien Zahlen sei $\mathfrak{C}^k$.

In der vorliegenden Arbeit sollen die Ergebnisse von P. Scherk[1]) für $k = 2$ auf beliebige k verallgemeinert werden. Wir behalten einfacher Vergleichbarkeit zuliebe die dortige Schreibweise weitgehend bei und betrachten, wenn f und d natürliche Zahlen mit $(f, d) = 1$ sind, die Menge $\mathfrak{C}_f^k$ der k-freien Zahlen a mit $(a, f) = 1$, die Menge $\mathfrak{T}_{f,d}^k$ der Zahlen a mit $(a, f) = 1$ und $P_k(a) = d$ sowie die Menge $\mathfrak{A}_{f,d}^k$ der Zahlen a mit $(a, f) = 1$ und $P_k(a) \geqq d$. Für jede dieser Mengen $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir wie üblich mit $M(N)$, d. h. mit dem entsprechenden lateinischen Buchstaben als Funktionszeichen, die Anzahl ihrer Elemente $\leqq N$ (N positiv) und den Grenzwert $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{M(N)}{N}$, falls er existiert, als natürliche Dichte $D^*(\mathfrak{M})$. Es gelten dann, wenn $\zeta(k)$ die Riemannsche ζ-Funktion ist, folgende Sätze:

Satz 1. *Für die Menge $\mathfrak{C}^k$ existiert die natürliche Dichte*

$$D^*(\mathfrak{C}^k) = \frac{1}{\zeta(k)}.$$

Beweis[2]). Es ist für $N \geqq 1$

$$C^k(N) = N - \sum_p \left[\frac{N}{p^k}\right] + \sum_{p_1, p_2} \left[\frac{N}{p_1^k p_2^k}\right] - \sum_{p_1, p_2, p_3} \left[\frac{N}{p_1^k p_2^k p_3^k}\right] + - \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left[\frac{N}{n^k}\right] = \sum_{n \leqq N^{1/k}} \mu(n) \left[\frac{N}{n^k}\right] = \sum_{n \leqq N^{1/k}} \mu(n) \frac{N}{n^k} + R_k(N),$$

wobei

$$|R_k(N)| = \sum_{n \leqq N^{1/k}} \mu(n) \left(\left[\frac{N}{n^k}\right] - \frac{N}{n^k}\right) \leqq \sum_{n \leqq N^{1/k}} 1 \leqq N^{1/k}$$

ist, d. h.

$$D^*(\mathfrak{C}^k) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n \leqq N^{1/k}} \frac{\mu(n)}{n^k} + \frac{R_k(N)}{N}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^k} = \frac{1}{\zeta(k)}.$$

Satz 2[3]). *Für die Menge $\mathfrak{C}_f^k$ existiert die natürliche Dichte*

$$D^*(\mathfrak{C}_f^k) = \frac{1}{\zeta(k)} \prod_{p|f} \frac{p^{k-1}}{1 + p + \cdots + p^{k-1}}.$$

---

[1]) *P. Scherk*, Bemerkungen zur Arbeit von H. Kanold. Dieses Journal **196** (1956), 133—136; im folgenden mit S zitiert.

[2]) Vgl. S, Anhang. [3]) Vgl. S, Gl. (8).

Beweis. Es sei o. B. d. A. vorausgesetzt, daß f quadratfrei ist, denn sonst gibt es eine Zerlegung der Form $f = f' g^2$ mit quadratfreiem f', und dann ist sicher $\mathfrak{C}_f^k = \mathfrak{C}_{f'}^k$, so daß die Behauptung, wenn sie für f' bewiesen ist, auch für f gilt.

Für $f = 1$ folgt der Satz aus Satz 1. Wir nehmen nun an, er sei für irgendein quadratfreies f bewiesen, und q sei eine zu f teilerfremde Primzahl. Dann ist für $N \geqq 1$

$$C_{qf}^k(N) = C_f^k(N) - \sum_{\substack{a \leqq N,\,(a,f)=1 \\ q \mid a,\, a \in \mathfrak{C}^k}} 1 .$$

Ist a eine der in der letzten Summe gezählten Zahlen, so gibt es eine Zerlegung der Form $a = qa' = q^\varkappa a''$ mit $1 \leqq \varkappa \leqq k-1$ und $(a'', qf) = 1$. Da jede solche Zahl a'' mit $1 \leqq a'' \leqq \frac{N}{q^\varkappa}$ in der Gesamtheit aller dieser Zerlegungen (bei festem $\varkappa$) genau einmal auftritt, wird somit

$$C_{qf}^k(N) = C_f^k(N) - \sum_{\varkappa=1}^{k-1} C_{qf}^k\left(\frac{N}{q^\varkappa}\right),$$

d. h.

$$C_f^k(N) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} C_{qf}^k\left(\frac{N}{q^\varkappa}\right). \tag{1}$$

Wir verwenden nun den folgenden

Hilfssatz. *Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen natürlicher Zahlen derart, daß die natürliche Dichte $D^*(\mathfrak{A}) = \alpha$ existiert und daß für alle positiven N die Beziehung*

$$A(N) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} B\left(\frac{N}{q^\varkappa}\right) \qquad (q, k > 1,\ \textit{ganz}) \tag{2}$$

besteht. Dann existiert die natürliche Dichte $D^*(\mathfrak{B}) = \beta$, und es ist

$$\alpha = \beta \cdot \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \frac{1}{q^\varkappa}. \tag{3}$$

Beweis. Offenbar ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} B(N) &= A(N) - \sum_{\varkappa=1}^{k-1} B\left(\frac{N}{q^\varkappa}\right) \\ &= A(N) - \sum_{\varkappa=1}^{k-1} A\left(\frac{N}{q^\varkappa}\right) + \sum_{\varkappa_1=1}^{k-1} \sum_{\varkappa_2=1}^{k-1} B\left(\frac{N}{q^{\varkappa_1+\varkappa_2}}\right), \end{aligned}$$

und durch wiederholte Anwendung von (2) erhält man, wenn für $s = 1, 2, \ldots$

$$Q_s(A(N)) = A(N) - \sum_{\varkappa_1=1}^{k-1} A\left(\frac{N}{q^{\varkappa_1}}\right) + - \cdots + (-1)^s \sum_{\varkappa_1=1}^{k-1} \cdots \sum_{\varkappa_s=1}^{k-1} A\left(\frac{N}{q^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_s}}\right)$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} Q_{2s-1}(A(N)) + \sum_{\varkappa_1=1}^{k-1} \cdots \sum_{\varkappa_{2s}=1}^{k-1} B\left(\frac{N}{q^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_{2s}}}\right) &= B(N) \\ = Q_{2s}(A(N)) - \sum_{\varkappa_1=1}^{k-1} \cdots \sum_{\varkappa_{2s+1}=1}^{k-1} B\left(\frac{N}{q^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_{2s+1}}}\right), \end{aligned}$$

also

$$\frac{Q_{2s-1}(A(N))}{N} \leqq \frac{B(N)}{N} \leqq \frac{Q_{2s}(A(N))}{N}. \tag{4}$$

Ferner ist beim Grenzübergang $s \to \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\{Q_{2s}(A(N)) - Q_{2s-1}(A(N))\} &= \frac{1}{N} \sum_{\varkappa_1=1}^{k-1} \cdots \sum_{\varkappa_{2s}=1}^{k-1} A\left(\frac{N}{q^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_{2s}}}\right) \\ &\leqq \sum_{\varkappa_1=1}^{k-1} \cdots \sum_{\varkappa_{2s}=1}^{k-1} \frac{1}{q^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_{2s}}} = \left(\sum_{\varkappa=1}^{k-1} \frac{1}{q^\varkappa}\right)^{2s} = o(1), \end{aligned}$$

und daraus folgt nach (4), da nach Voraussetzung für jedes s die Folge $\frac{1}{N} Q_s(A(N))$ konvergent ist, die Existenz von $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{B(N)}{N} = D^*(\mathfrak{B})$. Also besteht für $\varkappa = 1, \ldots, k-1$ die asymptotische Gleichung

$$B\left(\frac{N}{q^\varkappa}\right) \cong \frac{N}{q^\varkappa} D^*(\mathfrak{B}),$$

und hieraus erhält man (3) auf Grund von (2).

Wenden wir nun den Hilfssatz auf die Mengen $\mathfrak{C}_f^k$ und $\mathfrak{C}_{qf}^k$ an, was nach (1) möglich ist, so erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung die Aussage, daß die natürliche Dichte von $\mathfrak{C}_{qf}^k$ existiert und

$$D^*(\mathfrak{C}_{qf}^k) = D^*(\mathfrak{C}_f^k) : \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \frac{1}{q^\varkappa} = D^*(\mathfrak{C}_f^k) \cdot \frac{q^{k-1}}{1 + q + \cdots + q^{k-1}}$$
$$= \frac{1}{\zeta(k)} \prod_{p|qf} \frac{p^{k-1}}{1 + p + \cdots + p^{k-1}}$$

ist. Damit ist Satz 2 allgemein bewiesen.

Satz 3 [4]. *Für die Menge $\mathfrak{T}_{f,d}^k$ existiert die natürliche Dichte*

$$D^*(\mathfrak{T}_{f,d}^k) = \frac{1}{\zeta(k)\, d^k} \prod_{p|f} \frac{p^{k-1}}{1 + p + \cdots + p^{k-1}}.$$

Beweis. Offenbar ist für $N \geqq 1$

$$T_{f,d}^k(N) = \sum_{\substack{ad^k \leq N \\ (ad^k, f) = 1 \\ P_k(ad^k) = d}} 1 = \sum_{\substack{a \leq \frac{N}{d^k} \\ (a, f) = 1 \\ P_k(a) = 1}} 1 = C_f^k\left(\frac{N}{d^k}\right),$$

und daraus folgt nach Satz 2

$$D^*(\mathfrak{T}_{f,d}^k) = \frac{1}{d^k} D^*(\mathfrak{C}_f^k) = \frac{1}{\zeta(k)\, d^k} \prod_{p|f} \frac{p^{k-1}}{1 + p + \cdots + p^{k-1}}.$$

Satz 4 [5]. *Für die Menge $\mathfrak{A}_{f,d}^k$ existiert die natürliche Dichte*

$$D^*(\mathfrak{A}_{f,d}^k) = \prod_{p|f} \frac{p-1}{p} - \frac{1}{\zeta(k)} \prod_{p|f} \frac{p^{k-1}}{1 + p + \cdots + p^{k-1}} \cdot \sum_{\substack{b=1 \\ (b,f)=1}}^{d-1} \frac{1}{b^k}.$$

Beweis. Nach Definition von $\mathfrak{A}_{f,d}^k$ ist für $N \geqq 1$

$$A_{f,d}^k(N) = \sum_{\substack{a \leq N \\ (a,f)=1}} 1 - \sum_{b=1}^{d-1} \sum_{\substack{a \leq N \\ (a,f)=1 \\ P_k(a)=b}} 1 = \sum_{\substack{a \leq N \\ (a,f)=1}} 1 - \sum_{\substack{b=1 \\ (b,f)=1}}^{d-1} T_{f,b}^k(N).$$

In dem letzten Ausdruck ist die erste Summe asymptotisch gleich $\frac{\varphi(f)}{f} N = \prod\limits_{p|f} \frac{p-1}{p} N$, die zweite Summe asymptotisch gleich $N \sum\limits_{\substack{b=1 \\ (b,f)=1}}^{d-1} D^*(\mathfrak{T}_{f,d}^k)$. Daraus folgt die Behauptung nach Satz 3.

---

[4]) Vgl. S, Gl. (5).

[5]) Vgl. S, Schluß der Arbeit.

Eingegangen 26. August 1955.

Distribution of Bordered Matrices in a Finite Field.

By *John H. Hodges*, Buffalo, N. Y.

1. Introduction. Let $GF(q)$, where $q = p^f$ and p is a rational prime, denote the Galois field of order p^f. Let A be a non-singular matrix of order m with elements in $GF(q)$. In § 3 we consider the problem of determining the number of $s \times m$ matrices U and $m \times t$ matrices V with elements in $GF(q)$ such that the matrix

$$M = \begin{bmatrix} A & V \\ U & 0 \end{bmatrix} \tag{1. 1}$$

has rank $m + r$ for $r \leqq s, t$. We find (Theorem 1) that the number of such pairs U, V is equal to

$$g(s, t, r)\, N_t^s(A, B_r), \tag{1. 2}$$

where B_r is any $s \times t$ matrix of rank r, $N_t^s(A, B_r)$ is the number of pairs U, V such that

$$UAV = B_r, \tag{1. 3}$$

and $g(s, t, r)$ is the number of $s \times t$ matrices of rank r; these numbers are given explicitly by (3. 8) and (2. 1) below. In § 4 we deal with the more general case of (1. 1) in which A is an $m \times n$ matrix of rank $h \leqq m, n$.

It is of interest to remark that in [2] with $p > 2$, L. Carlitz and the author have treated the corresponding problems for symmetric, skew-symmetric, and hermitian A with elements in $GF(q)$. The methods and results of this paper are very similar to those of [2].

2. Notation and preliminaries. Let $q = p^f$. Numbers of $GF(q)$ will be denoted by lower case Greek letters $\alpha, \beta, \ldots$. Italic capitals $A, B, \ldots$ will denote matrices with elements in $GF(q)$ except as indicated. $A(m, n)$ will denote a matrix of m rows and n columns and $A(m, n; r)$ a matrix of the same dimensions having rank r. Further, $I(m, n; r)$ will denote the matrix of m rows and n columns having the identity of order r in the upper left-hand corner and zero's elsewhere. If $A = A(m, n; r)$ then by [1, p. 281, Corollary 1] there exist non-singular $P(m, m)$ and $Q(n, n)$ such that $PAQ = I(m, n; r)$.

We shall need the formula, due to Landsberg [4], for the number $g(m, n, r)$ of $m \times n$ matrices of rank r with elements in $GF(q)$, namely

$$g(m, n, r) = q^{\frac{1}{2}r(r-1)} \prod_{i=1}^{r} \frac{(q^{m-i+1} - 1)(q^{n-i+1} - 1)}{(q^i - 1)}. \tag{2. 1}$$

3. The number $\Theta_t^s(A, m, r)$. Let A be a non-singular matrix of order m. Let $\Theta_t^s(A, m, r)$ denote the number of pairs $U(s, m)$, $V(m, t)$ of matrices such that the matrix

$$M = \begin{bmatrix} A & V \\ U & 0 \end{bmatrix} \tag{3. 1}$$

has rank $m + r$, $r \leqq s, t$. It is clear that without loss of generality we may consider the same problem for the simpler matrix

$$M_1 = \begin{bmatrix} I_m & V \\ U & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Suppose that $M_1 = (\mu_{ij})$. Then $V = (\mu_{ij})$ for $1 \leqq i \leqq m$ and $m + 1 \leqq j \leqq m + t$ and $U = (\mu_{ij})$ for $m + 1 \leqq i \leqq m + s$ and $1 \leqq j \leqq m$. In terms of the two sets of variables $x_1, x_2, \ldots, x_{m+s}$ and $y_1, y_2, \ldots, y_{m+t}$ the bilinear form having matrix M_1 is

$$L_1 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+t} \mu_{ij} x_i y_j + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=m+1}^{m+s} \mu_{ij} x_i y_j. \tag{3.3}$$

We may rewrite (3.3) as

$$L_2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i + \sum_{j=m+1}^{m+s} \mu_{ji} x_j)(y_i + \sum_{k=m+1}^{m+t} \mu_{ik} y_k) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+s} \sum_{k=m+1}^{m+t} \mu_{ji} \mu_{ik} x_j y_k. \tag{3.4}$$

Under the non-singular linear transformations

$$\begin{cases} x_i' = x_i + \sum_{j=m+1}^{m+s} \mu_{ji} x_j & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_i' = x_i & (i = m + 1, \ldots, m + s) \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} y_i' = y_i + \sum_{k=m+1}^{m+t} \mu_{ik} y_k & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ y_i' = y_i & (i = m + 1, \ldots, m + t) \end{cases}$$

the bilinear form (3.4) becomes

$$L_2 = \sum_{i=1}^{m} x_i' y_i' - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+s} \sum_{k=m+1}^{m+t} \mu_{ji} \mu_{ik} x_j' y_k', \tag{3.5}$$

which has matrix

$$M_2 = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -UV \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Since rank M = rank M_2, it is clear that $\Theta_t^s(A, m, r)$ is the number of pairs U, V for which rank (UV) = rank$(-UV) = r$.

Let $N_t^s(A, B)$ denote the number of pairs $U(s, m)$, $V(m, t)$ of matrices such that

$$UAV = B, \tag{3.7}$$

where $A = A(m, m; m)$ and $B = B(s, t)$ are given matrices. Then by [3; Theorem 3] for every B of rank $r \leqq m$ we have

$$N_t^s(A, B) = q^{ms+nt-\frac{1}{2}r(2m-r+1)} \prod_{i=1}^{r} (q^{m-i+1} - 1) \cdot \sum_{j=0}^{(s-r, t-r)} q^{-(m-r)j} g(s - r, t - r, j), \tag{3.8}$$

where $(s - r, t - r)$ denotes the minimum of $s - r$ and $t - r$.

In view of (3.6) it is clear that for each $B(s, t; r)$ there are $N_t^s(A, B)$ pairs U, V satisfying (3.1). Since $N_t^s(A, B)$ is the same for every $B = B(s, t; r)$ and $g(s, t, r)$ is the number of such B we have proved

Theorem 1. *Let $\Theta_t^s(A, m, r)$ denote the number of matrices M as defined by* (3.1). *Then*

$$\Theta_t^s(A, m, r) = g(s, t, r)\, N_t^s(A, B_r), \tag{3.9}$$

where $B_r = B_r(s, t; r)$ and $g(s, t, r)$ and $N_t^s(A, B)$ are given by (2.1) *and* (3.8) *respectively.*

4. The general case. Let A be a fixed $m \times n$ matrix of rank $h \geqq 1$. Let $\Phi_t^s(A, m, n, h, r)$ denote the number of pairs $U(s, n)$, $V(m, t)$ of matrices such that

$$M = \begin{bmatrix} A & V \\ U & 0 \end{bmatrix} \tag{4. 1}$$

has rank $h + r$, $r \leqq s, t$. As in the non-singular case we may consider the problem for the simpler matrix

$$M_1 = \begin{bmatrix} I(m, n; h) & V \\ U & 0 \end{bmatrix}. \tag{4. 2}$$

Let $M_1 = (\mu_{ij})$ so that $V = (\mu_{ij})$ for $1 \leqq i \leqq m$ and $n + 1 \leqq j \leqq n + t$ and $U = (\mu_{ij})$ for $m + 1 \leqq i \leqq m + s$ and $1 \leqq j \leqq n$. In terms of the two sets of variables $x_1, x_2, \ldots, x_{m+s}$ and $y_1, y_2, \ldots, y_{n+t}$ the bilinear form having matrix M_1 is

$$L_1 = \sum_{i=1}^{h} x_i y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=n+1}^{n+t} \mu_{ij} x_i y_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=m+1}^{m+s} \mu_{ij} x_i y_j. \tag{4. 3}$$

We may rewrite (4. 3) as

$$\begin{aligned} L_1 = \sum_{i=1}^{h} (x_i + \sum_{k=m+1}^{m+s} \mu_{ki} x_k)(y_i + \sum_{j=n+1}^{n+t} \mu_{ij} y_j) - \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=m+1}^{m+s} \sum_{j=n+1}^{n+t} \mu_{ki} \mu_{ij} x_k y_j \\ + \sum_{i=h+1}^{m} \sum_{j=n+1}^{n+t} \mu_{ij} x_i y_j + \sum_{i=h+1}^{n} \sum_{k=m+1}^{m+s} \mu_{ki} x_k y_i. \end{aligned} \tag{4. 4}$$

Under the non-singular linear transformations

$$\begin{cases} x_i' = x_i + \sum_{k=m+1}^{m+s} \mu_{ki} x_k & (i = 1, 2, \ldots, h) \\ x_i' = x_i & (i = h + 1, \ldots, m + s) \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} y_i' = y_i + \sum_{j=n+1}^{n+t} \mu_{ij} y_j & (i = 1, 2, \ldots, h) \\ y_i' = y_i & (i = h + 1, \ldots, n + s) \end{cases}$$

the bilinear form (4. 4) becomes

$$\begin{aligned} L_2 = \sum_{i=1}^{h} x_i' y_i' - \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=m+1}^{m+s} \sum_{j=n+1}^{n+t} \mu_{ki} \mu_{ij} x_k' y_j' \\ + \sum_{i=h+1}^{m} \sum_{j=n+1}^{n+t} \mu_{ij} x_i' y_j' + \sum_{i=h+1}^{n} \sum_{k=m+1}^{m+s} \mu_{ki} x_k' y_i', \end{aligned} \tag{4. 5}$$

which has matrix

$$M_2 = \begin{bmatrix} I_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_2 \\ 0 & U_2 & -U_1 V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_h & 0 \\ 0 & M_3 \end{bmatrix}, \tag{4. 6}$$

where $U_1 = (\mu_{ij})$ for $m + 1 \leqq i \leqq m + s$ and $1 \leqq j \leqq h$, $U_2 = (\mu_{ij})$ for $m + 1 \leqq i \leqq m + s$ and $h + 1 \leqq j \leqq n$, $V_1 = (\mu_{ij})$ for $1 \leqq i \leqq h$ and $n + 1 \leqq j \leqq n + t$, $V_2 = (\mu_{ij})$ for $h + 1 \leqq i \leqq m$ and $n + 1 \leqq j \leqq n + t$.

Since rank M = rank M_2, it is clear that $\Phi_t^s(A, m, n, h, r)$ is the number of matrices M_3 in (4. 6) having rank r. If $-U_1 V_1$ has rank $k \leqq r$, by definition of $\Phi_t^s(A, m, n, h, r)$, the number of pairs U_2, V_2 such that M_3 has rank r is $\Phi_{n-h}^{m-h}(B_k, s, t, k, r - k)$. For each $B = B_k(s, t; k)$ there are $N_t^s(A_h, B_k)$ pairs U_1, V_1 such that $-U_1 V_1 = B$, and since there are $g(s, t, k)$ such B we have proved

Theorem 2. *Let $\Phi_t^s(A, m, n, h, r)$ denote the number of matrices M as defined in* (4. 1). Then

$$(4.\ 7) \qquad \Phi_t^s(A, m, n, h, r) = \sum_{k=0}^{r} g(s, t, k)\, N_t^s(A_h, B_k)\, \Phi_{n-h}^{m-h}(B_k, s, t, k, r-k),$$

where A_h is non-singular of order h, $B_k = B_k(s, t; k)$ and $g(s, t, k)$ and $N_t^s(A_h, B_k)$ are given by (2. 1) *and* (3. 8) *respectively.*

We remark that (4. 7) also holds for $r = 0$. For in this case it is necessary that $M_3 = 0$ in (4. 6), which implies $U_2 = V_2 = U_1 V_1 = 0$. The number of pairs U_1, V_1 satisfying this condition, which is the value of $\Phi_t^s(A, m, n, h, 0)$, is clearly $N_t^s(A_h, 0)$. On the other hand, for $r = 0$, since $\Phi_{n-h}^{m-h}(B_0, s, t, 0, 0) = 1$, the right side of (4. 7) is also equal to $N_t^s(A_h, 0)$. Repeated application of the recursion formula (4. 7) would ultimately yield an explicit formula for $\Phi_t^s(A, m, n, h, r)$.

As a check on Theorem 2 we can show that for $m = n = h$, (4. 7) reduces to (3. 9), that is

$$(4.\ 8) \qquad \Phi_t^s(A, m, m, m, r) = \Theta_t^s(A, m, r).$$

References.

[1] *Garret Birkhoff* and *Saunders MacLane*, A survey of modern algebra, New York 1941.

[2] *L. Carlitz* and *John H. Hodges*, Distribution of bordered symmetric, skew and hermitian matrices in a finite field, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **195** (1955/56), 192—201.

[3] *John H. Hodges*, Representations by bilinear forms in a finite field, Duke Math. Journal, **22** (1955), 199—510.

[4] *Georg Landsberg*, Über eine Anzahlbestimmung und eine damit zusammenhängende Reihe, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **111** (1893), 87—88.

Eingegangen 26. Oktober 1955.

Über die Evoluten von endlichen Ovalen.

Von *Alexander Ostrowski* in Basel.

1. Wir verstehen im folgenden unter einem *endlichen Oval* ein Oval mit durchweg stetiger und von Null verschiedener Krümmung, das nur endlich viele Scheitelpunkte (d. h. Extremalpunkte der Krümmung) besitzt. Die Anzahl der Scheitelpunkte ist dann offenbar *gerade*, etwa $= 2m$.

Es liegt an sich sehr nahe, die Untersuchung solcher Ovale mit derjenigen ihrer Evoluten in Verbindung zu bringen. Soviel ich weiß, ist dies indessen nur im Falle von Ovalen konstanter Breite von F. Schilling[1]) gemacht worden. Der Grund dürfte darin liegen, daß in den klassischen Sätzen über die Beziehungen zwischen den Evoluten und Evolventen bis vor kurzem die Situation in bezug auf die verlangten Differenzierbarkeitsannahmen unklar war. So hat auch Schilling in seinen diesbezüglichen Sätzen die Annahme der *dreimaligen* Differenzierbarkeit des betreffenden Ovals konstanter Breite zugrunde legen müssen. Nachdem nun diese Situation kürzlich in einigen Arbeiten des Verfassers geklärt worden ist[2]), liegt es nahe, die Untersuchung der Ovale mit Hilfe der Evoluten in Angriff zu nehmen.

2. Wir beweisen in dieser Mitteilung vor allem (in den Nrn. 4—7) das folgende Resultat:

Satz I. *Die Evolute eines endlichen Ovals mit $2m$ Scheitelpunkten besteht aus $2m$ Bögen σ_μ, $\mu = 1, \ldots, 2m$, von denen jeder eine monotone Drehung besitzt. Werden die σ_μ geeignet zyklisch angeordnet, so stößt jedes σ_μ an das unmittelbar vorangehende und an das unmittelbar folgende in je einer Hellebardenspitze an. Sind dann die Gesamtdrehung und die Bogenlänge von σ_μ bzw. $\alpha_\mu > 0$ und $|\sigma_\mu|$, so gelten die Relationen*

$$\sum_{\mu=1}^{2m} \alpha_\mu = 2\pi, \tag{1}$$

$$\sum_{\mu=1}^{2m} (-1)^\mu \, |\sigma_\mu| = 0. \tag{2}$$

Umgekehrt, sind $2m$ Bögen σ_μ mit monotoner Drehung gegeben, so daß bei geeigneter zyklischer Anordnung jeder Bogen σ_μ an die beiden unmittelbar benachbarten in je einer Hellebarden-

---

[1]) *F. Schilling*, Die Theorie und Konstruktion der Kurven konstanter Breite, Zeitschrift für Mathematik und Physik **63** (1915), pp. 67—136.

[2]) Vgl. *A. Ostrowski*, Über Evoluten und Evolventen ebener Kurven, Archiv der Mathematik **6** (1955), pp. 170—179, sowie *A. Ostrowski*, Un' applicazione dell' integrale di Stieltjes alla teoria elementare delle curve piane, Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei, serie VIII, 1955, pp. 373—375. Das Resultat läßt sich etwa folgendermaßen formulieren: Es sei K_2 die Gesamtheit aller Kurvenbögen, längs deren der Krümmungsradius durchweg existiert, sowie stetig und monoton ist. Es sei andererseits K_1 die Gesamtheit aller Kurvenbögen, längs deren die Drehung monoton und stetig ist. Dann besitzt jeder Kurvenbogen aus K_2 eine zu K_1 gehörende Evolute, und aus jedem Kurvenbogen, der zu K_1 gehört, lassen sich durch Fadenkonstruktion unendlich viele zu K_2 gehörende Bögen konstruieren, die den ursprünglichen Bogen zur Evolute haben.

spitze anstößt, und gelten bei entsprechender Numerierung die Relationen (1) *und* (2), *so gibt es zwei Scharen paralleler Ovale, die die Vereinigungsmenge der σ_μ zur Gesamtevolute haben und aus ihr durch Fadenkonstruktion hervorgehen.*

3. An Hand der Relationen (1) und (2) wird sodann der Verlauf der Evolute Σ eines endlichen Ovals diskutiert. Hierzu wird von einer geeignet (in Nr. 9) definierten Zerlegung von Σ in *einfache Zyklen* Gebrauch gemacht und (in Nr. 11) eine einfache Relation (7) zwischen m und den Anzahlen der positiv und der negativ umlaufenen Zyklen hergeleitet. Aus (7) ergibt sich sofort, daß die Evolute nur dann eine einfache geschlossene Kurve sein kann, wenn die Anzahl der Scheitelpunkte gleich 4 ist. Es werden ferner (in den Nrn. 12, 13 und 15—19) weitere Sätze über das Auftreten von Doppelpunkten bei einem einzigen Einzelbogen wie bei benachbarten Einzelbögen der Evolute angegeben. Daraus ergibt sich insbesondere auch (Nr. 14) ein Beweis des Vierscheitelsatzes, der sich vielleicht nicht durch die größte Kürze, wohl aber durch anschauliche Zugänglichkeit auszeichnet.

Sodann werden die obigen Resultate spezialisiert, einerseits auf die Kurven konstanter Breite (Nr. 20) und andererseits auf die endlichen Ovale mit $m = 2$. Für $m = 2$ werden alle wirklich möglichen Gestalten der Evolute aufgestellt. Es ergeben sich, neben dem Falle einer doppelpunktfreien, im negativen Sinne in bezug auf das Innere umlaufenen Evolute, ein Fall mit 2 Doppelpunkten und ein Fall mit 4 Doppelpunkten, von denen zwei auch zusammenfallen können, sowie die zu diesen Fällen symmetrischen Fälle. In jedem dieser mit Doppelpunkten behafteten, in den Fig. 11—13 dargestellten Fälle tritt bei einem der Einzelbögen eine Eigenüberschneidung auf.

4. *Beweis des Satzes I.* Sei S ein endliches Oval mit genau $2m$ Scheitelpunkten, so durchlaufen, daß die Krümmung positiv ist. Bezieht man alle Größen auf den Tangentenrichtungswinkel θ, so möge etwa die (orientierte) Tangente in einem Scheitelpunkt mit maximalem Krümmungsradius als $\theta_0 = 0$ entsprechend angenommen werden. Wird von da an das Oval im positiven Sinne durchlaufen, so mögen den weiteren Scheitelpunkten die θ-Werte $\theta_1, \ldots, \theta_{2m-1}$ entsprechen, wobei wir noch das Symbol $\theta_{2m} = 2\pi$ einführen:

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{2m-1} < \theta_{2m} = 2\pi. \tag{3}$$

Den Scheitelpunkten mit geraden Indizes entsprechen Maxima, denen mit ungeraden Indizes Minima des Krümmungsradius $\varrho(\theta)$.

Dann besteht die Evolute Σ aus $2m$ Bögen $\sigma_1 = \sigma_{2m+1}, \ldots, \sigma_{2m} = \sigma_0$, wobei σ_μ allgemein dem Bogen von S mit $\theta_{\mu-1} \leqq \theta \leqq \theta_\mu$ entspricht und zwei aufeinanderfolgende σ, etwa σ_μ und $\sigma_{\mu+1}$, insbesondere σ_{2m} und σ_1, jeweils in einer Hellebardenspitze zuzusammenstoßen.

Die absolute Drehung längs σ_μ ist dann $\theta_\mu - \theta_{\mu-1}$, woraus (1) sofort folgt.

Ferner gilt

$$|\sigma_\mu| = (-1)^\mu [\varrho(\theta_\mu) - \varrho(\theta_{\mu-1})], \tag{4}$$

da $\varrho(\theta_\mu)$ maximal für gerade μ und minimal für ungerade μ ist. Daraus folgt aber (2) sofort.

5. Es mögen umgekehrt $2m$ Bögen σ_μ gegeben sein, die die Bedingungen des Satzes I erfüllen. Die Spitzentangente zu einer Hellebardenspitze zerfällt in zwei Halbgeraden, von denen die eine „innerhalb", die andere „außerhalb" der Spitze verläuft und entsprechend als *Innenspitzentangente* bzw. *Außenspitzentangente* bezeichnet wird.

Auf jedem σ_μ ist ein positiver Durchlaufungssinn eindeutig definiert durch die Forderung, daß dabei die konkave Seite von σ_μ stets zur Linken bleibt, und wir können, eventuell nach einer Umnumerierung, annehmen, daß $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2m}$ im gewählten Durchlaufungssinn aufeinanderfolgen.

Wir bezeichnen ferner den *Anfangspunkt* von σ_μ, d. h. den Punkt, wo σ_μ mit $\sigma_{\mu-1}$ (und σ_1 mit σ_{2m}) zusammenstößt, mit a_μ.

Wir beginnen die Fadenkonstruktion an σ_1, indem wir etwa auf der *Außen*spitzentangente in a_1 einen genügend weit von a_1 entfernten Punkt A_1 wählen (vgl. Fig. 1) und von diesem Punkte aus die zum Bogen σ_1 gehörende Evolvente A_1A_2 konstruieren. Dann ist die Tangentendrehung längs des Bogens A_1A_2 gleich α_1. Zugleich dreht sich die Tangente längs A_1A_2 immer *im positiven Sinne*, da ja für ein beliebig kleines Stück dieser Evolvente der Tangentenrichtungszuwachs gleich demjenigen des entsprechenden Evolutenstücks ist.

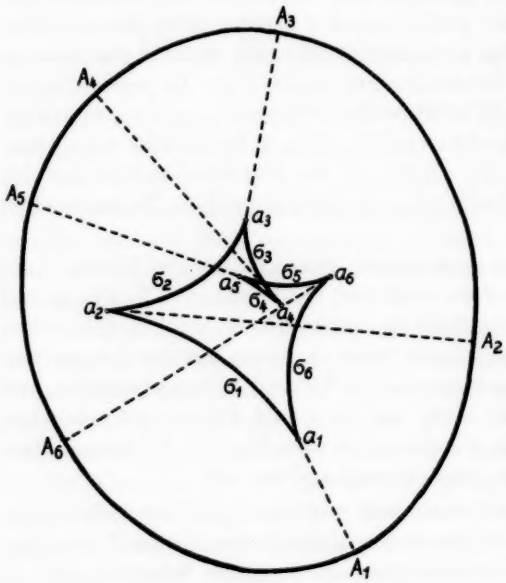


Fig. 1

Zugleich gilt:

$$|A_2a_2| = |A_1a_1| + |\sigma_1|.$$

Vom Punkte A_2 aus, der dann auf der *Innen*spitzentangente in a_2 liegt, zeichnen wir nun den Evolventenbogen zu σ_2, der bis A_3 verläuft, einem Punkte auf der Außenspitzentangente in a_3. Die Drehung längs des Bogens A_2A_3 ist dann α_2. Zugleich gilt:

$$|A_3a_3| = |A_2a_2| - |\sigma_2|.$$

6. Indem wir so weiterfahren, erhalten wir eine Folge von Evolventenbögen $A_\mu A_{\mu+1}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, 2m$), wobei jedes A_μ mit ungeradem μ auf der Außenspitzentangente in a_μ, und jedes A_μ mit geradem μ auf der Innenspitzentangente in a_μ liegt. Längs jedem $A_\mu A_{\mu+1}$ dreht sich die Tangente im positiven Sinne, und ihre Gesamtdrehung längs dieses Bogens ist gleich α_μ. Ferner steht der Bogen $A_\mu A_{\mu+1}$ senkrecht auf den Strecken $a_\mu A_\mu$ und $a_{\mu+1}A_{\mu+1}$.

Allgemein gilt

$$|A_{\mu+1}a_{\mu+1}| = |A_\mu a_\mu| - (-1)^\mu |\sigma_\mu| \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m).$$

Daraus folgt wegen (2) für $|A_{2m+1}a_{2m+1}| = |A_{2m+1}a_1|$ der Wert

$$|A_1a_1| + |\sigma_1| - |\sigma_2| + |\sigma_3| - + \cdots - |\sigma_{2m}| = |A_1a_1|.$$

Dies bedeutet aber, daß A_{2m+1} mit A_1 zusammenfällt, so daß die Gesamtheit der Evolventenbögen $A_\mu A_{\mu+1}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, 2m$) eine geschlossene Kurve darstellt, längs deren sich die Tangente durchweg stetig und im positiven Sinne dreht mit der Gesamtdrehung 2π. Daher ist diese Kurve ein endliches Oval mit $2m$ Scheitelpunkten, dessen Gesamtevolute durch die Vereinigungsmenge der σ_μ gegeben wird. Wählen wir A_1 auf der *Innen*spitzentangente in a_1, so erhalten wir eine zweite Schar von Ovalen, die Evolventen von Σ sind. Damit ist der Satz I bewiesen.

Es sei noch hervorgehoben, daß, wenn man in einer Spitze ins „Innere" der Spitze schaut, die σ-Bögen von rechts nach links aufeinanderfolgen.

7. Es soll nunmehr die Gestalt im Großen der Evolute Σ eines endlichen Ovals S mit $2m$ Scheitelpunkten diskutiert werden.

Das Normalenstück von S zwischen einem Scheitelpunkt von S und der zugehörigen Spitze von Σ kann entweder „innerhalb" oder „außerhalb" der zugehörigen Spitze liegen. Wird nun ein Bogen von S zwischen zwei aufeinanderfolgenden Scheitelpunkten *im positiven Sinne* durchlaufen und nimmt dabei der Krümmungsradius monoton *zu*, so wird bei der Fadenkonstruktion der entsprechende Bogen von Σ *ab*gewickelt. Nimmt dagegen der Krümmungsradius monoton *ab*, so wird der zugehörige Bogen von Σ *auf*gewickelt. Daraus folgt, daß das oben erwähnte Normalenstück zu den Scheitelpunkten mit *maximalem* Krümmungsradius *innerhalb* und zu den Scheitelpunkten mit *minimalem* Krümmungsradius *außerhalb* der zugehörigen Spitze verläuft (vgl. Fig. 1).

8. Es möge nun Σ vom Krümmungsmittelpunkt von S durchlaufen werden, während der zugehörige Punkt von S im positiven Sinne das Innere von S umläuft. Wir wollen dann den gesamten Tangentenrichtungszuwachs längs Σ berechnen. Da der Tangentenrichtungszuwachs längs σ_μ gleich α_μ ist, beträgt die Summe dieser Zuwächse nach Satz I 2π. Es müssen aber noch die Tangentenrichtungszuwächse beim Durchgang durch die Spitzen dazugerechnet werden. Die Regel für die Berechnung dieser Zuwächse lautet dahin, daß die Kurve in der Nähe der Spitze durch einen Kreisbogen mit entsprechend kleinem Radius abgerundet wird[3]). Dann zeigt ein Blick auf die Fig. 1, daß jeder Spitze der Tangentenrichtungszuwachs vom Betrag $-\pi$ entspricht. Daher beträgt der gesamte Tangentenrichtungszuwachs längs Σ beim oben festgelegten Umlaufssinn

$$\sum_{\mu=1}^{2m} \alpha_\mu - 2m\pi = 2(1-m)\pi. \tag{5}$$

9. Ist Σ eine beliebige, mit stückweise stetiger Tangente versehene geschlossene Kurve in der Ebene, so ist nach dem *Umlaufssatz*[3]) der gesamte Tangentenrichtungszuwachs längs Σ im Falle der Doppelpunktfreiheit gleich 2π oder -2π, je nachdem ob ihr Inneres im positiven oder im negativen Sinne umlaufen wird. Besitzt dagegen Σ endlich viele Doppelpunkte[4]), so kann diese Kurve zur Bestimmung des gesamten Tangentenrichtungszuwachses in „*einfache Zyklen*" zerlegt werden.

Zu dem Zwecke fasse man irgendeinen Doppelpunkt D von Σ ins Auge und durchlaufe Σ von D aus, bis man zum ersten Male nach D zurückkehrt. Wird dabei das Stück Σ_1 von Σ durchlaufen und wird das übrig bleibende Stück mit Σ_2 bezeichnet, so ist dadurch Σ in zwei geschlossene Kurven derart zerlegt worden, daß sowohl bei Σ_1 als auch bei Σ_2 die Gesamtzahl der Doppelpunkte — unter Berücksichtigung der Mehrfachheit — kleiner ist als bei Σ. Wird das gleiche Verfahren auf Σ_1 und Σ_2 angewandt, solange die Kurven noch Doppelpunkte besitzen, so gelangt man schließlich zu einer Zerlegung des gesamten Kurvenzuges Σ in endlich viele einfache geschlossene Kurven, die wir als *einfache Zyklen* bezeichnen wollen.

Es mögen bei einer derartigen Zerlegung von Σ in einfache Zyklen sich α Zyklen ergeben, deren Inneres im *positiven* Sinne, und β Zyklen, deren Inneres im *negativen* Sinne umlaufen wird. Dann ist, wie aus dem Umlaufssatz leicht folgt, der gesamte Tangentenrichtungszuwachs längs Σ gleich $2(\alpha-\beta)\pi$[5]). —

---

[3]) Vgl. *A. Ostrowski*, Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente. I. Compositio Mathematica **2** (1935), pp. 26—49, insbesondere pp. 31, 35, 44.

[4]) Wobei unter „Doppelpunkten" auch mehrfache Punkte mit höherer Mehrfachheit zu verstehen sind.

[5]) Es genügt z. B. durch „erlaubte Deformationen" zuerst zu erreichen, daß alle Doppelpunkte nur einfache Doppelpunkte sind, und sodann, daß in jedem Doppelpunkt sämtliche dort zusammenstoßenden Bögen eine einzige gemeinsame Tangente haben. Die Berechtigung, „erlaubte Deformationen" auszuführen, ergibt sich aber z. B. aus dem Hilfssatz über die Sehnenreduktion, der auf p. 45 der in der Fußnote [3]) zitierten Arbeit bewiesen wurde.

Es sei übrigens bemerkt, daß weder die Zerlegung von Σ in einfache Zyklen noch die Gesamtanzahl $\alpha + \beta$ dieser Zyklen eindeutig bestimmt sind, während $\alpha - \beta$ natürlich eine Invariante ist. Man betrachte z. B. die Fig. 2. Fängt man hier bei der Zerlegung in einfache Zyklen mit einem der Doppelpunkte 1 oder 2 an, so ergibt sich $\alpha = \beta = 1$, während, wenn man mit einem beliebigen der übrigen Doppelpunkte 3, 4, 5 beginnt, sich $\alpha = \beta = 2$ ergibt. —

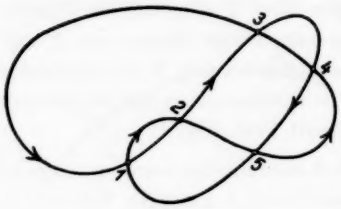


Fig. 2

10. Zwischen der Anzahl der Zyklen von Σ und der Anzahl der Doppelpunkte bestehen gewisse Relationen, wenn man in geeigneter Weise zwei Typen von Doppelpunkten auseinander hält. Wir setzen von nun an in dieser Nr. voraus, *daß alle Doppelpunkte von Σ einfache Doppelpunkte sind*, d. h., daß durch jeden solchen Doppelpunkt genau *zwei* einfache Kurvenbögen von Σ hindurchgehen. Ein solcher Doppelpunkt heißt ein *Durchsetzungsdoppelpunkt*, wenn jeder der beiden durch ihn hindurchgehenden einfachen Teilbögen von Σ den anderen Teilbogen in zwei Teile zerschneidet, die auf verschiedenen Seiten des ersten Teilbogens liegen.

Ein einfacher Doppelpunkt dagegen heißt ein *Berührungsdoppelpunkt*, wenn die beiden in ihm zusammenstoßenden, hinreichend kleinen einfachen Teilbögen von Σ einander nicht durchsetzen.

Schneiden sich zwei Kurven Σ_1, Σ_2 in einem einfachen Punkt, so kann der Schnittpunkt wieder ein *Berührungsschnittpunkt* oder ein *Durchsetzungsschnittpunkt* sein, je nachdem, ob von den hinreichend kleinen Teilbögen von Σ_1 und Σ_2 in der Umgebung dieses Punktes jeder vollständig auf einer gewissen Seite des anderen liegt oder nicht.

Dann ist die folgende Tatsache leicht einzusehen:

A. *Es seien Σ und Π zwei mit stückweise stetiger Tangente versehene und höchstens endlich viele Doppelpunkte aufweisende geschlossene Kurven, die einander nur in einfachen Schnittpunkten außerhalb der Doppelpunkte von Σ und Π treffen. Dann ist die Anzahl derjenigen ihrer Schnittpunkte, die Durchsetzungsschnittpunkte sind, gerade.*

In der Tat, wird etwa Σ in endlich viele einfache Zyklen zerlegt, so genügt es, die Behauptung für den Fall einzusehen, daß Σ durch einen einfachen Zykel Z ersetzt wird. Dann ist es aber klar, daß die Kurve Π genau so oft ins Innere von Z eindringt, wie sie aus dem Inneren heraustritt, und die Behauptung A. ist bewiesen.

11. Wir wollen nun zeigen:

B. *Es sei Σ eine mit stückweise stetiger Tangente und nur endlich vielen Doppelpunkten, die sämtlich einfache Durchsetzungsdoppelpunkte sind, versehene geschlossene Kurve. Bedeutet d die Anzahl dieser Doppelpunkte und z die Anzahl der einfachen Zyklen, in die Σ bei irgendeinem der oben charakterisierten Zerlegungsverfahren zerlegt werden kann, so gilt*

$$d \equiv z - 1 \pmod 2, \quad d \geqq z - 1. \tag{6}$$

Beweis. Ist Σ ein einfacher Zykel, also $d = 0$, $z = 1$, so ist (6) klar. Wir können daher beim Beweis annehmen, daß (6) bereits richtig ist für alle Fälle, in denen z einen kleineren Wert hat. Wird nun Σ beim ersten Schritt der in Nr. 9 charakterisierten Zerlegung in einem Doppelpunkt D in zwei Teilkurven Σ_1 und Σ_2 zerlegt, so bezeichnen wir die zu Σ_1 und Σ_2 gehörenden, z und d entsprechenden Anzahlen mit z_i, $d_i (i = 1, 2)$, so daß $z = z_1 + z_2$ ist.

Um d darzustellen, betrachten wir noch die Anzahl d' der Durchsetzungsschnittpunkte von Σ_1 mit Σ_2. Diese Schnittpunkte liefern die Doppelpunkte von Σ, die von den bei Σ_1 und Σ_2 einzeln auftretenden verschieden sind. Da nämlich D ein Durchsetzungsdoppelpunkt von Σ ist, wird er hinterher zu einem Berührungsschnittpunkt von Σ_1 und Σ_2 und wird daher in d' nicht mitgezählt; daher hat man

$$d = d_1 + d_2 + (d' + 1), \; d' \geqq 0, \; d \geqq d_1 + d_2 + 1.$$

Schreibt man nun die Kongruenzen (6) für Σ_1 und Σ_2 und addiert sie, so ergibt sich $d_1 + d_2 \equiv z - 2$ und daher, da d' nach A. gerade ist, $d \equiv z - 1 \pmod 2$.

Addiert man andererseits die (6) entsprechenden Ungleichungen für Σ_1 und Σ_2, so ergibt sich $d_1 + d_2 \geqq z - 2$, woraus nach dem Obigen, da $d \geqq d_1 + d_2 + 1$ ist, die Ungleichung (6) auch für Σ folgt. Damit ist B. bewiesen.

12. Wenden wir die Formel (5) insbesondere auf die Gesamtevolute Σ von S an, so ergibt sich die Formel

$$1 - m = \alpha - \beta. \tag{7}$$

Wir nehmen nun zunächst an, daß die Evolute selbst eine einfache geschlossene Kurve ist. In (7) muß dann $\alpha - \beta = \pm 1$ gesetzt werden, je nachdem das Innere von Σ im positiven oder im negativen Sinne umlaufen wird. So ergibt sich $1 - m = \pm 1$ aus (7), woraus folgt, daß

$$m = 2, \; \alpha - \beta = -1, \; \alpha = 0, \; \beta = 1$$

ist. Daher gilt:

Satz II. *Ist die Evolute Σ von S eine einfache geschlossene Kurve, so ist S ein Oval mit genau 4 Scheitelpunkten, und Σ wird in bezug auf ihr Inneres im negativen Sinne umlaufen, wenn S im positiven Sinne umlaufen wird.*

Wir sehen, daß Σ im allgemeinen Selbstüberschneidungen besitzen muß. Bei einer solchen Selbstüberschneidung könnte ein *Einzelbogen* σ von Σ einen Doppelpunkt besitzen (vgl. Fig. 4 in Nr. 14). Wir sprechen dann von einer *Eigenüberschneidung*. Dann ist der Tangentenrichtungszuwachs längs σ größer als π. Aus der Relation (1) folgt daher

Satz III. *Es kann höchstens ein Einzelbogen von Σ eine Eigenüberschneidung besitzen.*

13. Es seien nun σ und σ' zwei unmittelbar aufeinanderfolgende, in einer Spitze zusammenstoßende Teilbögen von Σ. Treffen sie sich in einem Punkte D und bilden dort miteinander einen Winkel γ, so erhalten wir, falls weder σ noch σ' eine Eigenüberschneidung besitzt, die Konfiguration der Fig. 3. In der Tat beranden dann die Stücke von σ und σ', zwischen der gemeinsamen Spitze und D, zusammengenommen einen einfach zusammenhängenden Bereich B. Unter $\gamma > 0$ soll der in bezug auf diesen Bereich B „innere" Winkel bei D verstanden werden, so daß der Tangentenrichtungszuwachs beim Durchgang durch die Ecke D gleich $\pi - \gamma$ ist.

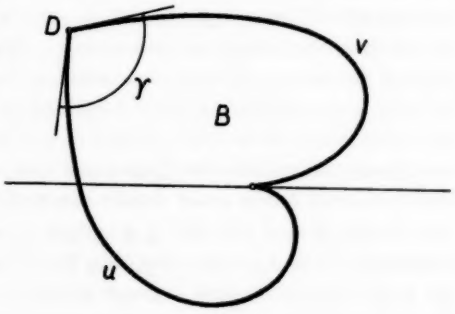


Fig. 3

B wird dabei im positiven Sinne umlaufen. (Man beachte, daß die Bögen σ bei unserer Festsetzung im positiven Sinne in bezug auf ihre konkave Seite durchlaufen werden.) Der gesamte Tangentenrichtungszuwachs beim Umlauf um B entsprechend

der Orientierung der σ-Bögen beträgt daher 2π. Andererseits beträgt dieser Zuwachs, wenn die Tangentenrichtungszuwächse längs σ und σ' zwischen der Spitze und D resp. mit u, v bezeichnet werden,

$$u + v - \pi + (\pi - \gamma) = u + v - \gamma.$$

Daher ergibt sich

$$u + v = 2\pi + \gamma > 2\pi,$$

was der Gleichung (1) widerspricht. Mit diesem Widerspruch haben wir bewiesen:

Satz IV. *Zwei unmittelbar aufeinanderfolgende in einer Spitze zusammenstoßende σ-Bögen ohne Eigenüberschneidung treffen sich außerhalb dieser Spitze nicht.*

14. Aus Satz IV folgt offenbar, daß für $m = 1$, d. h. im Falle eines Ovals mit zwei Scheitelpunkten, einer der σ-Bögen eine Eigenüberschneidung besitzen müßte. Daher würde Σ für $m = 1$ wie in der Fig. 4 aussehen. Man überblickt aber sofort, daß diese

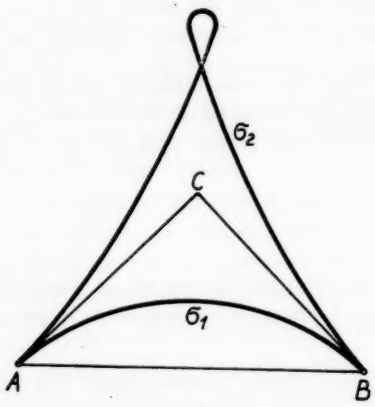


Fig. 4

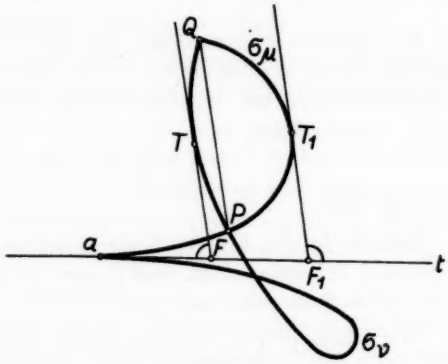


Fig. 5

Gestalt der Relation (2) widerspricht, da, wenn die Spitzentangenten in A und B sich in C schneiden,

$$|\sigma_1| < |AC| + |BC|, \; |\sigma_2| > |AC| + |BC|$$

wäre. Daher ist stets $m \geqq 2$. Dies ist der *Vierscheitelsatz.*

15. Es möge nun ein Einzelbogen σ_ν eine Eigenüberschneidung aufweisen und einen benachbarten Bogen $\sigma_\mu (\mu = \nu + 1$ oder $\nu - 1)$ außerhalb der gemeinsamen Spitze treffen. Ziehen wir dann die gemeinsame Spitzentangente von σ_ν und σ_μ (vgl. Fig. 5), so liegt σ_ν zunächst auf einer bestimmten Seite dieser Tangente, auf der auch die ganze Schleife von σ_ν bleibt. σ_μ aber liegt zuerst auf der σ_ν abgewandten Seite und muß dann auch auf dieser Seite bleiben, da $\alpha_\mu < \pi$ ist. Daher liegen sämtliche Schnittpunkte von σ_ν und σ_μ außerhalb der Spitze auf der der Schleife abgewandten Seite der Spitzentangente, und daher *kann keiner dieser Schnittpunkte auf der Schleife liegen.*

Nehmen wir nun an, daß σ_ν mit σ_μ wenigstens *zwei* Schnittpunkte außerhalb der gemeinsamen Spitze hat. (Vgl. die Fig. 5, die dem Fall $\mu = \nu + 1$ entspricht.) Es seien die zwei ersten längs σ_μ zuerst angetroffenen Schnittpunkte P, Q. Dann besitzen die von P nach Q laufenden Bögen von σ_ν und σ_μ je eine zu PQ parallele Tangente TF an σ_ν und T_1F_1 an σ_μ, die die betreffenden Bögen in den Punkten T resp. T_1 berühren und die gemeinsame Spitzentangente *at* an σ_ν und σ_μ bzw. in den Punkten F, F_1 treffen (vgl. Fig. 5). Dann ist die Drehung längs σ_ν von der Spitze a bis T gleich $\pi + \sphericalangle TFa$, und

die Drehung des Stücks von σ_μ von a bis T_1 gleich dem Winkel T_1F_1t. Die Summe dieser Drehungen ist aber dann bereits 2π, was unmöglich ist. Wir sehen:

Satz V. *Ein Einzelbogen σ, der eine Eigenüberschneidung aufweist, kann mit einem unmittelbar benachbarten Einzelbogen außerhalb der gemeinsamen Spitze höchstens einen Schnittpunkt haben, der sicher nicht auf der Schleife von σ liegt.*

16. Wir betrachten nun die Schnittpunkte von zwei Einzelbögen, die unmittelbare Nachbarn eines und desselben Bogens σ_μ sind. Wir beweisen:

Satz VI. *Es sei $\alpha_\mu \geqq \pi$, ohne daß σ_μ eine Eigenüberschneidung aufweist. Dann treffen sich die benachbarten Bögen $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$ nicht.*

Zum *Beweise* ziehe man (vgl. Fig. 6) die Außenspitzentangenten an σ_μ in a_μ und $a_{\mu+1}$ nach rückwärts bis zu ihrem Schnittpunkt R, der auch im Unendlichen liegen kann. Dann ist $\sphericalangle\, a_\mu R a_{\mu+1} = \alpha_\mu - \pi$. Verbindet man $a_{\mu-1}$ und $a_{\mu+2}$ mit R, so sind die Winkel $\sphericalangle\, a_\mu R a_{\mu-1}$ und $\sphericalangle\, a_{\mu+1} R a_{\mu+2}$ resp. *kleiner* als $\alpha_{\mu-1}$ und $\alpha_{\mu+1}$, da ja, wie in der Fig. 6 angedeutet, die beiden Endtangenten $a_{\mu+1}T$ und $a_{\mu+2}T$ an $\sigma_{\mu+1}$ sich in einem Punkte T treffen, derart, daß der Außenwinkel τ bei T des Dreiecks $TRa_{\mu+2}$ größer ist als der Innenwinkel $\sphericalangle\, TRa_{\mu+2}$. Man beachte hierzu, daß die Drehung $\alpha_{\mu+1}$ längs $\sigma_{\mu+1}$ unter unserer Voraussetzung $< \pi$ und daher $= \tau$ ist. Da demnach die Summe der drei Winkel bei R in der Fig. 6 kleiner ist als

$$\alpha_{\mu-1} + \alpha_\mu + \alpha_{\mu+1} - \pi < \pi < 2\pi,$$

so haben die Winkelräume $a_\mu R a_{\mu-1}$ und $a_{\mu+2} R a_{\mu+1}$ keine Punkte gemeinsam bis auf R. Da aber $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$ bzw. in diesen Winkelräumen verlaufen, folgt Satz VI ohne weiteres.

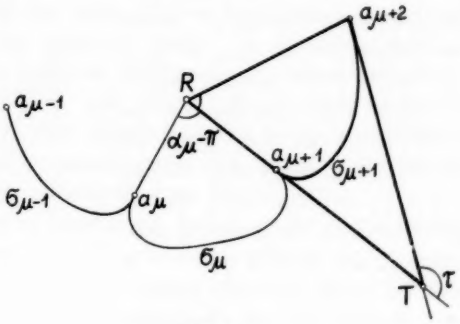


Fig. 6

17. Wir betrachten nunmehr die Schnittpunkte von $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$, wenn $\alpha_\mu < \pi$ ist. Hier müssen wir uns mit weniger begnügen als in VI.

Satz VII. *Es sei $\alpha_\mu < \pi$, und es mögen sich $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$ in einem Punkt D treffen. Bezeichnet man dann die Teilstücke von $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$ von a_μ resp. $a_{\mu+1}$ aus bis D entsprechend mit $s_{\mu-1}$ und $s_{\mu+1}$, so gilt*

$$|s_{\mu-1}| + |s_{\mu+1}| > |\sigma_\mu|. \tag{8}$$

18. *Beweis.* Wir legen die Verbindungsgerade von a_μ und $a_{\mu+1}$ in die x-Achse und orientieren die Figur (Fig. 7) so, daß σ_μ in der unteren Halbebene verläuft. Dann liegt a_μ links von $a_{\mu+1}$. Die Spitzentangenten $a_\mu t'$ und $a_{\mu+1}t''$ in diesen Punkten bilden mit der x-Achse die Winkel ψ_1 bzw. ψ_2 und schneiden sich in einem Punkte R, wo sie miteinander den Winkel $\psi = \pi - \alpha_\mu = \pi - \psi_1 - \psi_2$ bilden. Eine der Zahlen $\alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}$ ist sicher $< \pi$. Wir nehmen an, daß $\alpha_{\mu-1} < \pi$ ist; denn wäre $\alpha_{\mu-1} \geqq \pi$, so brauchten wir die Figur nur an der y-Achse zu spiegeln und die Spitzen entsprechend umzunumerieren.

Wir zeigen zuerst, daß *D in der unteren Halbebene* liegt. Denn sonst müßte $s_{\mu-1}$ in oder vor D die x-Achse erreichen und daher eine Drehung $\geqq \pi - \psi_1$ haben. Die gleiche Überlegung läßt sich auf $s_{\mu+1}$ anwenden, unabhängig davon, ob $\sigma_{\mu+1}$ eine Eigenüberschneidung aufweist oder nicht. Daher wäre die Drehung von $s_{\mu+1}$ wenigstens gleich $\pi - \psi_2$, und es würde folgen $\alpha_{\mu-1} + \alpha_{\mu+1} \geqq 2\pi - \psi_1 - \psi_2 = 2\pi - \alpha_\mu$, was der Relation (1) sicher widerspricht, da wenigstens ein weiteres positives α_μ existiert.

Betrachten wir nun die Lage von $s_{\mu-1}$, so ist klar, daß man beim Fortschreiten längs $\sigma_{\mu-1}$ sich immer mehr von der Geraden $a_\mu t'$ entfernt, da ja die Gesamtdrehung von

$\sigma_{\mu-1}$ nach Annahme $< \pi$ ist. $s_{\mu-1}$ muß aber auch unterhalb der x-Achse bleiben, denn sonst müßte $s_{\mu-1}$ zumindest die x-Achse erreichen und sodann wieder bis D in die untere Halbebene gelangen. Hierzu müßte aber die Drehung längs $s_{\mu-1}$ sicher $> \pi$ sein. *Wir sehen, daß sowohl D als auch der ganze Bogen $s_{\mu-1}$ bis auf den Punkt a_μ sowohl unterhalb der x-Achse als auch links von $a_\mu t'$ liegt.*

Wir beweisen nun, daß der Bogen $s_{\mu+1}$ keine Punkte mit dem Inneren des Dreiecks $a_\mu a_{\mu+1} R$ gemeinsam hat. Dies ist sofort klar, wenn $\sigma_{\mu+1}$ keine Eigenüberschneidung hat, da $\sigma_{\mu+1}$ ohne Eigenüberschneidung nur dann in das Dreieck $a_\mu a_{\mu+1} R$ eindringen könnte, wenn $\alpha_{\mu+1} > 2\pi - \psi_2$ wäre. Da aber $\psi_2 < \alpha_\mu$ ist, wäre dann $\alpha_{\mu-1} + \alpha_\mu > 2\pi$.

Es möge nun $\sigma_{\mu+1}$ eine Eigenüberschneidung haben. (Dieser Fall ist in Fig. 7 gezeichnet.) Wegen $\alpha_\mu = \pi - \psi$ ist die Drehung längs $s_{\mu+1}$ auf jeden Fall $< \pi + \psi$. Wir legen nun eine zu $a_{\mu+1} t''$ parallele Stützgerade an $s_{\mu+1}$, die $s_{\mu+1}$ im Punkte E der Schleife berühren möge, und legen durch E die Parallele EF zu $a_\mu t'$. Dann ist die Drehung längs des Stücks von $s_{\mu+1}$ zwischen $a_{\mu+1}$ und E gleich π, und die Drehung zwischen E und D muß daher $< \psi$ sein. Daher ist in keinem Punkte des Stücks ED die Tangente parallel zu $a_\mu t'$. Die Distanzen der Punkte dieses Stücks nach EF müssen daher längs ED monoton wachsen und im Punkte D ihren größten Wert haben. Daher liegt das ganze Stück ED und damit auch das ganze Stück $s_{\mu+1}$ *außerhalb* des Dreiecks $a_\mu a_{\mu+1} R$. Daher gilt

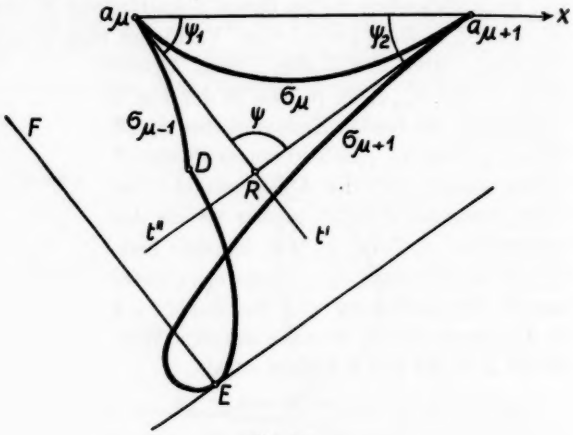


Fig. 7

$$|s_{\mu+1}| + |s_{\mu-1}| > |a_\mu R| + |a_{\mu+1} R| > |\sigma_\mu|,$$

w. z. b. w.

19. Wir beweisen endlich noch den

Satz VIII. *Es seien γ_1 und γ_2 zwei mit monotoner Drehung versehene eigenüberschneidungsfreie Bögen $DD'P_1$ bzw. $DD'P_2$, von denen die zwischen D und D' liegenden Stücke s_1 bzw. s_2 jeweils auf der konkaven Seite voneinander liegen. γ sei ein gleichfalls mit monotoner Drehung versehener eigenüberschneidungsfreier Bogen, der von P_1 nach P_2 verläuft und in den beiden Punkten P_1 und P_2 mit den Bögen γ_1 und γ_2 Hellebardenspitzen bildet (vgl. Fig. 8). Bilden dann die Tangenten an γ_1 und γ_2 in D miteinander den Winkel ψ als Innenwinkel der von s_1 und s_2 gebildeten Linse, so ist die Summe der Drehungen längs γ_1, γ_2 und γ gleich $\pi + \psi$.*

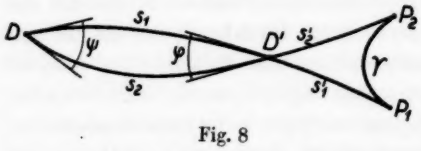


Fig. 8

Beweis. Es sei φ der Innenwinkel der Linse DD' bei D' [6]). Wir bezeichnen die Drehungen längs s_1 und s_2 resp. mit u_1 und u_2. Dann ist

$$u_1 + u_2 = \psi + \varphi, \tag{9}$$

[6]) Hat bei D' einer der Bögen γ_1, γ_2 eine Ecke, so ist es am einfachsten, durch eine erlaubte Deformation diese Ecke aus D' zu verschieben (vgl. zum Begriff der erlaubten Deformation die Fußnote [5])).

wie z. B. aus dem Umlaufssatz unmittelbar folgt. Wir bezeichnen ferner die Stücke von γ_1 und γ_2 von D' nach P_1 bzw. P_2 resp. mit s_1', s_2' und die entsprechenden Drehungen mit u_1' und u_2'. Die Drehung längs γ sei mit u bezeichnet. Wird nun der Umlaufssatz auf $D' P_1 P_2$ angewandt, im positiven Sinne in bezug auf das Innere dieses „Dreiecks", so ergibt sich, da die Tangentenrichtungszuwächse längs s_1', s_2' und γ bzw. $-u_1'$, $-u_2'$, $-u$ sind,

$$\pi + \pi + (\pi - \varphi) - u_1' - u_2' - u = 2\pi,$$

$$u_1' + u_2' + u = \pi - \varphi. \tag{10}$$

Durch Addition von (9) und (10) ergibt sich die Behauptung.

20. Will man die oben hergeleiteten Sätze insbesondere auf die *Kurven konstanter Breite* anwenden, so ist hier vor allem der Hurwitzsche Satz zu beachten, daß die Evolute einer Kurve konstanter Breite *doppelt durchlaufen* wird, so daß jeder Bogen σ_μ zweimal auftritt[7]). Daher sind α und β in der Formel (7) gerade, so daß m ungerade sein muß. Wir erhalten den Schillingschen Satz[8]), daß bei einer Kurve konstanter Breite mit endlich vielen Scheitelpunkten die Anzahl der Scheitelpunkte von der Form $4k + 2$ und insbesondere $\geqq 6$ ist. Daher ist in diesem Falle die Bedingung (2) von selbst erfüllt. Die Bedingung (1) reduziert sich aber hier darauf, daß, wenn man die doppelt durchlaufenen Einzelbögen nur einmal nimmt, die Summe ihrer absoluten Drehungen gleich π sein muß. Daher sind in diesem Falle Eigenüberschneidungen unmöglich[9]), und wegen Satz IV treffen sich zwei benachbarte σ-Bögen außerhalb einer Spitze nie.

Ferner folgt aus (7) im Falle einer Kurve konstanter Breite, daß die Anzahl der einfachen Zyklen der *nur einmal durchlaufenen* Evolute wenigstens gleich $k = (m-1)/2$ ist. Daher ist die Anzahl der Doppelpunkte der nur einmal durchlaufenen Evolute wenigstens gleich $k - 1 = (m - 3)/2$, sofern diese Doppelpunkte alle als *einfach* vorausgesetzt werden. Dies ist der Kern eines von Schilling vermutungsweise ausgesprochenen Satzes[10]).

21. Wir wollen nunmehr den Fall $m = 2$ genauer diskutieren. Wir beweisen zuerst:

Satz IX. *Sei $m = 2$. a) Hat keiner der Einzelbögen σ_μ eine Eigenüberschneidung, so treffen sich zwei „Gegenbögen", wie etwa $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$ nicht; b) hat ein Einzelbogen $\sigma_{\mu-1}$ eine Eigenüberschneidung, so trifft er seinen Gegenbogen $\sigma_{\mu+1}$ nicht; c) hat ein Einzelbogen σ_μ eine Eigenüberschneidung, so können $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$ höchstens einen Schnittpunkt haben.*

Beweis. Nehmen wir etwa an, $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$ treffen sich in D, während $\sigma_{\mu+2}$ und σ_μ keine Eigenüberschneidung haben[11]). Wegen VI sind dann α_μ und $\alpha_{\mu+2}$ beide $< \pi$. Wir bezeichnen die Stücke von $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$ von σ_μ aus bis D resp. mit $s_{\mu-1}$, $s_{\mu+1}$. Ebenso sollen mit $s_{\mu-1}'$ und $s_{\mu+1}'$ die beiden Stücke von $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$ bezeichnet werden, die von $\sigma_{\mu+2}$ bis D laufen. Dann gilt

$$|s_{\mu-1}| + |s_{\mu-1}'| = |\sigma_{\mu-1}|, \quad |s_{\mu+1}| + |s_{\mu+1}'| = |\sigma_{\mu+1}|. \tag{11}$$

22. Andererseits folgt aus Satz VII

$$|s_{\mu-1}| + |s_{\mu+1}| > |\sigma_\mu|, \quad |s_{\mu-1}'| + |s_{\mu+1}'| > |\sigma_{\mu+2}|.$$

Daraus ergibt sich durch Addition nach (11)

$$|\sigma_{\mu-1}| + |\sigma_{\mu+1}| > |\sigma_\mu| + |\sigma_{\mu+2}|,$$

---

[7]) *A. Hurwitz*, Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier, Annales de l'Ecole Normale Supérieure (3) **19** (1902), pp. 357—408. Gesammelte Werke I, pp. 509—554.

[8]) *F. Schilling*, l. c. p. 94.

[9]) *F. Schilling*, l. c. p. 102.

[10]) *F. Schilling*, l. c. p. 103, Fußnote.

[11]) Die Indizes sollen dabei, in leicht verständlicher Weise, modulo 4 genommen werden.

im Widerspruch zu (2). Folglich ist dieser Fall unmöglich. Wir sehen, daß, wenn $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$ sich treffen, es eine Eigenüberschneidung bei σ_μ oder $\sigma_{\mu+2}$ gibt. Damit sind unsere Behauptungen a) und b) bewiesen.

Es möge nun σ_μ eine Eigenüberschneidung haben und $\sigma_{\mu-1}$ mit $\sigma_{\mu+1}$ wenigstens *zwei* Schnittpunkte haben. Betrachten wir dann $\sigma_{\mu+2}$ und die Stücke von $\sigma_{\mu-1}$ und $\sigma_{\mu+1}$ bis zum *zweiten* Schnittpunkt, von $\sigma_{\mu+2}$ aus gezählt, so ergibt sich die Konfiguration der Fig. 8, wenn dort γ durch $\sigma_{\mu+2}$ ersetzt wird. Dann folgt aber aus Satz VIII, daß $\alpha_{\mu-1} + \alpha_{\mu+1} + \alpha_{\mu+2} > \pi$ wäre, was, da $\alpha_\mu > \pi$ ist, im Widerspruch zu (1) steht. Damit ist Satz IX vollständig bewiesen.

23. Aus Satz IX folgt, daß, wenn für $m = 2$ keiner der Einzelbögen σ_μ eine Eigenüberschneidung hat, Σ auch keine anderen Doppelpunkte besitzt und daher einen einzigen einfachen Zykel bildet.

Wir betrachten von nun an nur den Fall, daß es eine Eigenüberschneidung gibt, und wollen den mit Eigenüberschneidung versehenen Einzelbogen mit σ_1 bezeichnen. Insbesondere ist jetzt $\alpha + \beta > 1$.

Fassen wir nun die Doppelpunkte von Σ ins Auge, so ist zunächst leicht einzusehen, daß eine Spitze höchstens dann auf einem „fremden" Bogen liegen kann, wenn a_2 auf σ_4 oder a_1 auf σ_2 liegt. Denn auf σ_1 können a_3 oder a_4 nicht liegen, da ja nach Satz IXb) σ_1 von σ_3 nicht getroffen wird. Ferner kann a_3 wegen Satz IV nicht auf σ_4 liegen und ebensowenig a_4 auf σ_2. Aus dem gleichen Grunde liegen auf σ_3 keine „fremden" Spitzen a_1, a_2.

Die möglichen Typen von Σ für $m = 2$ sollen nun nach der Anzahl der vorkommenden Doppelpunkte diskutiert werden. Als Doppelpunkte kommen nach dem Obigen neben dem Doppelpunkt D_{11} auf σ_1, der von der Eigenüberschneidung herrührt, noch die Doppelpunkte

$$D_{24} = \sigma_2\sigma_4, \quad D_{12} = \sigma_1\sigma_2, \quad D_{14} = \sigma_1\sigma_4,$$

die nach den Indizes der durch sie hindurchgehenden Einzelbögen bezeichnet worden sind, vor. Sie sind, D_{24} wegen Satz IX, c) und D_{12}, D_{14} wegen Satz V, durch ihre Indizes eindeutig bestimmt. Was die ausgelassenen Doppelpunkte D_{13}, D_{23}, D_{34} anbetrifft, so folgt die Unmöglichkeit von D_{13} aus Satz IX, b) und diejenige von D_{23}, D_{34} aus Satz IV.

24. Wir zeigen nun, daß jeder der Doppelpunkte D_{11}, D_{24}, D_{12}, D_{14}, wenn er auftritt, *ein einfacher Doppelpunkt im Sinne der Nr.* 10 *ist.*

In der Tat, D_{11} ist sicher verschieden von D_{12} und D_{14}, da nach Satz V weder D_{12} noch D_{14} auf der Schleife von σ_1 liegen können. Daher ist auch $D_{11} \neq D_{24}$, da sonst $D_{11} = D_{12} = D_{14}$ wäre.

Es sei $D_{12} = D_{24}$; dann liegt nach dem Obigen (vgl. Fig. 5) D_{12} auf dem Bogen $a_1 D_{11}$ von σ_1, während σ_4 von diesem Bogen durch die Spitzentangente in a_1 getrennt ist. Daher ist dieser Fall nur möglich, wenn $D_{24} = D_{12} = a_1$ ist. Dann haben wir aber in a_1 nur einen *einfachen Doppelpunkt*, und ebenso schließt man im Falle $D_{14} = D_{24}$. Wir sehen, daß die Betrachtungen der Nr. 10 für $m = 2$ sicher anwendbar sind.

25. Wir müssen weiter noch überlegen, wann die oben angegebenen Doppelpunkte Berührungsdoppelpunkte sind. Man beachte nun, daß *ein Berührungsdoppelpunkt von Σ nur in einer der Spitzen liegen kann.* Denn sonst hätte man in einem Berührungsdoppelpunkt D zwei sich im eigentlichen Sinne berührende Bögen σ_i, σ_k, und der Tangentenrichtungszuwachs längs der beiden Stücke, in die Σ durch D zerlegt wird, müßte $= \pi$ sein. Dies ist aber unmöglich, da D nach Satz V und Satz IX, b) nicht auf der Schleife von σ_1 liegen kann und daher eines der beiden obigen Teilstücke von Σ die ganze Schleife von σ_1 enthalten muß.

Liegt aber ein Doppelpunkt von Σ in einer der Spitzen, so *behaupten wir, daß dies dann ein Berührungsdoppelpunkt ist.* In der Tat, es sei dies etwa die Spitze $a_1 = D_{12} = D_{24}$. Wäre dann a_1 ein Durchsetzungsdoppelpunkt, so müßte der Bogen σ_2 so durch a_1 hindurchgehen, daß er dort σ_1 und σ_4 berührt. Wir vereinigen nun σ_4 mit dem Teilstück von σ_3 zwischen a_1 und a_3 zu einem Bogen γ, der eine durchweg stetige und sich eigentlich monoton drehende Tangente aufweist. γ wird dann in den beiden Endpunkten a_4 und a_3 von σ_3 berührt, wobei in diesen beiden Punkten Hellebardenspitzen vorliegen. Dies ist aber die Konfiguration der Fig. 4 (wenn man dort σ_1 durch γ und σ_2 durch σ_3 ersetzt). Dann müßte aber σ_3 eine Eigenüberschneidung haben, was unmöglich ist. Wir sehen, daß *ein Doppelpunkt von Σ dann und nur dann ein Berührungsdoppelpunkt ist, wenn er mit einer der Spitzen a_1, a_2 zusammenfällt.*

Nunmehr folgt aus (6) und (7), daß sonst die Anzahl d der Durchsetzungsdoppelpunkte $\equiv z - 1 \equiv \alpha + \beta - 1 \equiv 0 \pmod 2$ ist, und wir sehen, daß, wenn keine Doppelpunkte *in die Spitzen a_1, a_2 fallen, die Anzahl der Doppelpunkte von Σ gerade ist.*

26. Nun folgt aus (7) für $m = 2$ wegen $\alpha + \beta > 1$

$$\beta = 1 + \alpha, \quad \beta + \alpha \equiv 1 \pmod 2, \quad \beta + \alpha \geqq 3,$$

so daß also Σ aus wenigstens *drei* einfachen Zyklen besteht. Wir sehen wieder, daß D_{11} nicht der einzige Doppelpunkt sein kann.

Wir betrachten zuerst die Fälle, in denen *genau* 2 Doppelpunkte vorliegen. Wir beweisen zunächst:

Satz X. *Σ kann nicht D_{11} und D_{24} zusammen als die beiden einzigen Doppelpunkte aufweisen.*

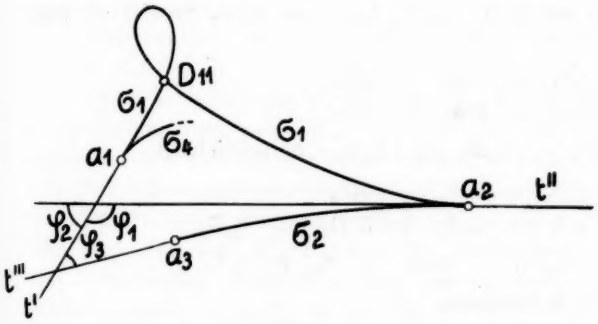


Fig. 9

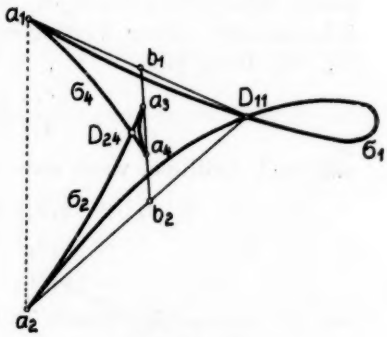


Fig. 10

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß, wenn nur D_{11} und D_{24} vorkommen, aus der Relation (1) sich zwangsläufig die „topologische Richtigkeit" der Fig. 10 ergibt und sodann, daß im Falle der Fig. 10 die Relation (2) nicht erfüllbar ist. Wir denken uns σ_1 in den Endpunkten a_1, a_2 durch die Spitzentangenten $a_1 t'$ und $a_2 t''$ ins Unendliche verlängert. Diese Spitzentangenten, nach rückwärts verlängert, schneiden sich unter dem Winkel φ_1 (vgl. Fig. 9), wobei $\varphi_1 = \alpha_1 - \pi$, $0 < \varphi_1 < \pi$ ist. Wir bezeichnen nun die beiden sich ins Unendliche erstreckenden von D_{11} ausgehenden Kurvenzüge $D_{11} a_1 t'$ und $D_{11} a_2 t''$ bzw. mit s_1, s_2. Dann begrenzen s_1 und s_2 zusammen ein „*Zweieck*" Z, außerhalb dessen die Schleife von σ_1 verläuft.

Wir verlängern ferner σ_2 in den Punkten a_2 und a_3 durch die ins Unendliche gehenden Spitzentangenten $a_2 t''$ und $a_3 t'''$ und bezeichnen den Kurvenzug $t'' a_2 \sigma_2 a_3 t'''$ mit s_3; dieser tritt bei a_2 ins Innere des Zweiecks Z ein. Wir behaupten nun, daß s_3 den Kurvenzug s_1 trifft. Denn sonst müßte $a_3 t'''$ innerhalb von Z ins Unendliche laufen, und daher

müßte längs σ_2 die Tangentenrichtung sich wenigstens um den Winkel $\varphi_2 = \pi - \varphi_1 = 2\pi - \alpha_1$ ändern (vgl. Fig. 9). Dann hätten wir aber $\alpha_2 \geqq \varphi_2 = 2\pi - \alpha_1$, was (1) widerspricht.

Daher trifft s_3 in der Tat s_1. Wir behaupten nun, daß dieser Treffpunkt nicht auf $a_1 t'$ liegen kann. Denn sonst läge a_1 auf s_3 oder „oberhalb" s_3, auf der D_{11} zugewandten Seite (vgl. Fig. 9). Der bei a_1 beginnende Kurvenbogen σ_4 schneidet aber σ_2 und muß daher eine Tangente besitzen, die einer Tangente längs s_3 parallel ist. Dann müßte aber die Drehung α_4 längs σ_4 wenigstens gleich dem Winkel φ_3 sein, den t' und t''' miteinander bilden (vgl. Fig. 9). Dieser Winkel ist aber offenbar gleich $\varphi_2 - \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2$. Wir hätten $\alpha_4 \geqq 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2$, was (1) widerspricht; daher liegt a_1 unterhalb s_3, und insbesondere trifft die Verbindungsstrecke $a_1 a_2$ den Bogen σ_2 außerhalb a_2 nicht.

Ganz analog sehen wir ein, daß die Strecke $a_1 a_2$ den Bogen σ_4 außerhalb a_1 nicht trifft.

27. Wir betrachten nun das „topologische Dreieck" $a_1 a_2 D_{11}$ (vgl. Fig. 10), gebildet von der Strecke $a_1 a_2$ und den Stücken von σ_1 von D_{11} nach a_1 und a_2. Dann müssen sich σ_2 und σ_4 in seinem Innern treffen, wo auch ihre Endpunkte a_4, a_3 und daher auch σ_3 liegen müssen, so daß die Konfiguration diejenige der Fig. 10 wird.

Wir zeichnen nun die Verbindungsstrecken $a_1 D_{11}$ und $a_2 D_{11}$ und verlängern die Verbindungsstrecke $a_3 a_4$. Ergänzen wir wiederum σ_2 durch die Spitzentangente $a_3 t'''$ zu einem Querschnitt s_3 von $a_1 a_2 D_{11}$, so liegt der Punkt a_4 zwischen s_3 und D_{11}. Daher kann die Verlängerung von $a_3 a_4$ über a_4 hinaus s_3 nicht mehr treffen und daher auch nicht die Strecke $a_1 a_2$. Eine hierzu symmetrisch verlaufende Überlegung beweist, daß auch die Verlängerung von $a_3 a_4$ über a_3 hinaus die Strecke $a_1 a_2$ nicht treffen kann.

Daher kann die Verlängerung von $a_3 a_4$ im (geradlinigen) Dreieck $a_1 a_2 D_{11}$ nur die beiden Seiten $a_1 D_{11}$ und $a_2 D_{11}$, und zwar sicher nicht in den Ecken treffen. Es seien die Schnittpunkte dieser Verlängerung mit $a_1 D_{11}$, $a_2 D_{11}$ bzw. mit b_1, b_2 bezeichnet (vgl. Fig. 10). Dann gilt:

$$|\sigma_4| \leqq |a_1 b_1| + |b_1 a_3| + |a_3 a_4|,$$
$$|\sigma_2| \leqq |a_2 b_2| + |b_2 a_4| + |a_3 a_4|,$$

und nach Addition, wenn man $|b_1 b_2| < |b_1 D_{11}| + |b_2 D_{11}|$ berücksichtigt,

$$\begin{aligned} |\sigma_2| + |\sigma_4| &\leqq |a_3 a_4| + |a_1 b_1| + |a_2 b_2| + |b_1 b_2| \\ &< |a_3 a_4| + |a_1 b_1| + |a_2 b_2| + |b_1 D_{11}| + |b_2 D_{11}| \\ &= |a_1 D_{11}| + |a_2 D_{11}| + |a_3 a_4| < |\sigma_1| + |\sigma_3|, \end{aligned}$$

was (2) widerspricht. Damit ist Satz X bewiesen.

28. Der nächst zu betrachtende Fall ist derjenige der *Doppelpunkte* D_{11}, D_{12}. Hier ergibt sich zwangsläufig der Verlauf, wie er in der Fig. 11 gezeichnet ist. Dabei sieht man die Erfüllbarkeit von (1) unmittelbar ein. Um die Möglichkeit, (2) zu erfüllen, einzusehen, beachte man, daß, wenn die Fig. 11 unter Außerachtlassung der Schleife, symmetrisch in bezug auf die Achse $a_4 D_{12}$ konstruiert und sodann eine beliebig kleine Schleife hinzugefügt wird, $|\sigma_1| + |\sigma_3| > |\sigma_2| + |\sigma_4|$ wird. Um aber zu erreichen, daß $|\sigma_2| + |\sigma_4|$ überwiegt, lasse man a_3 so ins Unendliche gehen, daß das Dreieck $a_3 a_4 a_2$ gleichschenklig mit der Basis $a_2 a_4$ bleibt. Dann gilt, wenn die Bögen σ_2 und σ_3 genügend gestreckt werden, $|\sigma_3| - |\sigma_2| \to 0$. Dabei kann aber $|\sigma_1|$ von vornherein um eine feste positive Zahl $< |\sigma_4|$ gemacht werden.

Der Fall mit den Doppelpunkten D_{11} und D_{14} ist vollständig symmetrisch zum Fall der Doppelpunkte D_{11}, D_{12}.

29. Wir fragen uns nun, ob *genau* 3 Doppelpunkte möglich sind. Nach dem am Ende der Nr. 25 Gesagten liegt dann ein Berührungsdoppelpunkt in einer der Spitzen

a_1, a_2. Ist dies z. B. a_2, so wird zugleich $D_{24} = D_{14}$, so daß wir es doch mit allen *vier* der oben in der Nr. 23 angegebenen Doppelpunkte zu tun haben, von denen zwei zusammenfallen. Dann ergibt sich aber zwangsläufig die Konfiguration der Fig. 12, wenn man sie vom Punkte a_2 aus verfolgt und die Lage der einzelnen Zweige der Figur relativ zur Lage

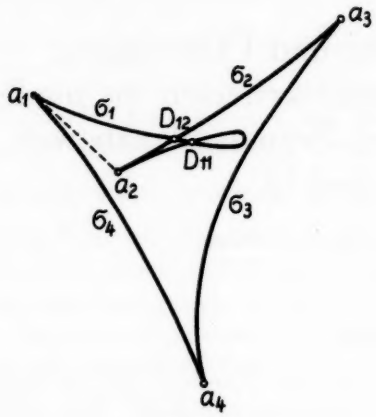


Fig. 11

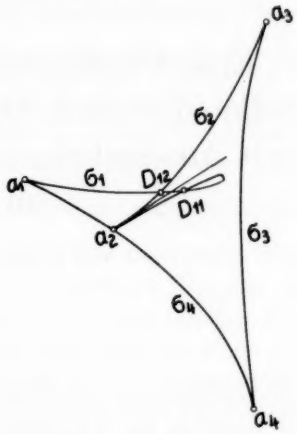


Fig. 12

der Spitzentangente durch a_2 beachtet. Andererseits ist (1) in der Fig. 12 offenbar erfüllt. Um die Erfüllbarkeit von (2) zu beweisen, lasse man wiederum a_3 so ins Unendliche gehen, daß $|\sigma_3| - |\sigma_2| \to 0$ gilt, und überlege, daß ja sowohl $|\sigma_1| > |\sigma_4|$ als auch $|\sigma_1| < |\sigma_4|$ erreicht werden kann.

Man beachte ferner, daß die Konfiguration der Fig. 12 offenbar ein Grenzfall der Fig. 11 ist.

Der Fall der Doppelpunkte D_{11}, D_{24}, D_{14} ist symmetrisch zum obigen Fall, so daß er nur möglich ist, wenn $D_{24} = a_1 = D_{12}$ ist, also wiederum alle vier Doppelpunkte vorhanden sind, von denen zwei zusammenfallen.

30. Nehmen wir nun endlich an, es seien alle Doppelpunkte D_{11}, D_{12}, D_{14}, D_{24} vorhanden und verschieden. Betrachtet man das „topologische Dreieck" $a_1 a_2 D_{11}$ in der Fig. 13, so sieht man, daß in unserem Falle dieses Dreieck durch den Querschnitt $a_1 D_{14}$ längs σ_4 in zwei Teilgebiete getrennt wird, während das Stück von σ_2 zwischen a_2 und D_{12}, das ja auf der der Schleife abgewandten Seite der Spitzentangente in a_2 verläuft, σ_4 innerhalb dieses Dreiecks in D_{24} schneiden muß.

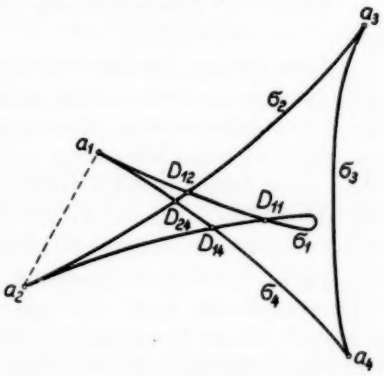


Fig. 13

Wir sehen, daß die Konfiguration wie in der Fig. 13 aussehen muß. Hier ist wiederum (1) erfüllt. Die Erfüllbarkeit von (2) sieht man ein, indem man D_{11} möglichst nahe an D_{24} heranbringt und einerseits die Schleife hinreichend klein und andererseits möglichst groß werden läßt.

Man beachte, daß in allen Fällen, in denen Σ sich nicht auf einen einzigen Zykel reduziert, $z = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ ist.

Eingegangen 12. Dezember 1955.

Eine Verallgemeinerung und Übertragung der Schneiderschen Algebraizitätskriterien ins p-adische mit Anwendung auf einen Transzendenzbeweis im p-adischen*).

Von *Orhan Ş. İçen*, z. Zt. in Göttingen.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit werden die beiden von Schneider 1951 (Schneider [11]) gegebenen Kriterien für die Algebraizität im arithmetischen Sinne einer analytischen Funktion von einer komplexen Veränderlichen verallgemeinert und gleichzeitig in das p-adische Gebiet übertragen. Es wird dabei die von Schneider a. a. O. gegebene Beweismethode wesentlich benutzt. Die Übertragung wird dann auf den Beweis des Mahler-Veldkampschen Satzes über die Transzendenz von α^β im p-adischen angewendet (Mahler [7], Veldkamp [15]). Ein verwandter Beweis desselben wurde von Günther aus der Übertragung eines früheren Satzes von Schneider gefolgert (Günther [5], Schneider [9]). Für eine kurze Geschichte der Algebraizitätskriterien im obigen Sinne vgl. Dörge [2] und Schneider [11].

Einige im folgenden häufig benutzte Definitionen werden wir der Übersichtlichkeit halber hier zusammenstellen:

Dem Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen, der durch algebraische Abschließung der perfekten Hülle des Körpers P von rationalen Zahlen in bezug auf die Absolutbetragsbewertung entstanden ist, stellen wir für jede rationale Primzahl p einen p-adisch bewerteten Körper zur Seite. Dieser letztere wird folgendermaßen erhalten: Wir bilden zunächst die perfekte Hülle des Körpers P in bezug auf seine p-adische Bewertung (der Henselsche p-adische Körper $\mathsf{K}(p)$). Dann schließen wir diesen algebraisch ab und nehmen wieder die perfekte Hülle dieses letzten Körpers, welche ein sowohl perfekter als auch algebraisch abgeschlossener Körper ist und auf den die p-adische Bewertung von P fortgesetzt werden kann (vgl. Hasse [3], Loonstra [6], Kap. II und die dort angegebene Literatur). Diesen bewerteten Körper nennen wir im folgenden das „*p-adische Gebiet*". Im Einklang damit wird der Körper der komplexen Zahlen das „*komplexe Gebiet*" genannt.

Ein Element aus dem p-adischen Gebiet nennen wir *transzendent*, wenn es keiner algebraischen Gleichung $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = 0$ genügt, wobei die Koeffizienten a_ν aus P sind.

Unter allen algebraischen Gleichungen mit ganzen rationalen Koeffizienten, denen eine algebraische Zahl α genügt, gibt es eine, bis auf einen Faktor ± 1 eindeutig bestimmte Gleichung $G(z) \equiv \sum_{\sigma=0}^{\varepsilon} a_\sigma z^\sigma = 0$ mit kleinstem Grad und teilerfremden Koeffizienten. Die

*) Abgekürzte und umgearbeitete Fassung einer Dissertation, die im Mai 1955 von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen angenommen wurde.

Gleichung $G(z) = 0$, die notwendig irreduzibel sein muß, nennen wir die *Minimalgleichung* und das Polynom $G(z)$ das *Minimalpolynom* von α.

Den Grad von $G(z)$ nennen wir den *Grad von* α und das (durch α eindeutig bestimmte) Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von $G(z)$ nennen wir die *Höhe von* α.

Eine analytische Funktion $f(z)$ wird *algebraisch im arithmetischen Sinne* (kurz: *algebraisch i. a. S.*) genannt, wenn sie einer algebraischen Gleichung $\sum\limits_{i,\varkappa=0,0}^{i,k} a_{i\varkappa} z^i (f(z))^\varkappa = 0$ genügt mit algebraischen $a_{i\varkappa}$ über dem Körper der rationalen Zahlen P. (Mithin genügt $f(z)$ auch einer solchen Gleichung mit ganzrationalen $a_{i\varkappa}$.) Unter einer analytischen Funktion wird dabei im komplexen Gebiet eine gewöhnliche analytische Funktion, im p-adischen eine einzige Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z - z_0)^\nu$ mit einem mehr als den Punkt $z = z_0$ enthaltenden Konvergenzbereich verstanden, da im p-adischen analytische Fortsetzung einer Potenzreihe durch Umbildung unmöglich ist (vgl. Loonstra [6], Kap. III).

Es sei noch hinzugefügt, daß im folgenden das Zeichen $|\ |$ eine beliebige Bewertung darstellt. Wenn es sich um einen gewöhnlichen Absolutbetrag bzw. um einen p-adischen Betrag handelt, wird diese Tatsache im Anschluß an Hasse [3] durch einen angehängten Index ∞ bzw. p präzisiert, wie $|\ |_\infty$ bzw. $|\ |_p$. Eine Beziehung, welche nur das Zeichen $|\ |$ ohne Index enthält, gilt also für irgendeine dieser Bewertungen.

Diese Arbeit ist von Herrn Prof. Th. Schneider angeregt und auf jede Weise gefördert worden. Es ist mir mehr als eine formale Pflicht, ihm an dieser Stelle für seine menschliche und fachliche Hilfe bestens zu danken.

TEIL I.

Verallgemeinerung und Übertragung des 1. Schneiderschen Kriteriums ins p-adische.

§ 1. Vorbereitendes über Interpolationsstellen- und Höhenfolgen.

In diesem Paragraphen wollen wir gewisse Interpolationsstellenfolgen, die *zulässigen Folgen*, abgrenzen, die wir dem Satz I des § 3 zugrunde legen. Dazu brauchen wir die Begriffe *ausgeglichene Folge* und *vergleichbare Stellenfolge*.

A. Definition. Eine nach $+\infty$ divergierende Folge $\{u_n\}$ von reellen Zahlen heißt *ausgeglichen*, wenn es eine positive reelle Zahl A derart gibt, daß von einem genügend großen n ab die Relation

$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} u_\nu}{n} > A\,\bar{u}_{n+1} \tag{1}$$

gilt. Dabei wurde gesetzt: $\bar{u}_n = \operatorname*{Max}\limits_{k=1,\ldots,n} (u_k)$, $\underline{u}_n = \operatorname*{Min}\limits_{k=n,n+1,\ldots} (u_k)$. Da $\{u_n\}$ keinen endlichen Häufungspunkt besitzen soll, ist die Existenz des Minimums klar. Es gilt immer

$$\underline{u}_n \leqq u_n \leqq \bar{u}_n \tag{2}$$

und für monoton nicht-abnehmende Folgen

$$\underline{u}_n = u_n = \bar{u}_n. \tag{2a}$$

Lemma 1. *Es sei $\{u_n\}$ eine ausgeglichene Folge. Dann ist jede Folge $\{u'_n\}$ ausgeglichen, die durch Weglassung endlichvieler Anfangsglieder entstanden ist, sowie jede Folge $\{u''_n\}$, die aus $\{u_n\}$ durch Hinzufügung endlichvieler Anfangsglieder hervorgeht.*

Beweis. Es ist klar, daß für $n \to \infty$ auch $u'_n, u''_n \to +\infty$ strebt. Es bleibt nur übrig, die Relation (1) für $\{u'_n\}, \{u''_n\}$ zu verifizieren:

Es sei $u'_n = u_{n_0+n}$, $n_0 \geqq 1$ fest, $n = 1, 2, \ldots$. Aus der Voraussetzung folgt die Existenz eines $N \geqq 0$, so daß für $n > N$

$$(3) \qquad u_{n+1} > \operatorname{Max}(0, \bar{u}_{n_0}), \quad \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \underline{u_\nu}}{n} > A\bar{u}_{n+1}, \quad \left| \frac{\sum_{\nu=1}^{n_0} \underline{u_\nu}}{n\bar{u}_{n+1}} \right|_\infty < \varepsilon$$

gilt, wobei ε der Bedingung $0 < \varepsilon < A$ unterworfen ist. Andererseits gelten

$$(4) \quad \begin{cases} \underline{u'_\nu} = \operatorname*{Min}_{j=\nu,\nu+1,\ldots} (u'_j) = \operatorname*{Min}_{j=n_0+\nu, n_0+\nu+1,\ldots} (u_j) = \underline{u_{n_0+\nu}} \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots, \\ \bar{u}'_{n+1} = \operatorname*{Max}_{j=1,\ldots,n+1} (u'_j) = \operatorname*{Max}_{j=n_0+1,\ldots,n_0+n+1} (u_j) = \operatorname*{Max}_{j=1,\ldots,n_0+n+1} (u_j) = \bar{u}_{n_0+n+1} \text{ für } n > N. \end{cases}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$(5) \quad \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \underline{u'_\nu}}{n\bar{u}'_{n+1}} = \sum_{\nu=n_0+1}^{n_0+n} \frac{\underline{u_\nu}}{n\bar{u}_{n_0+n+1}} = \frac{n_0+n}{n} \left\{ \frac{\sum_{\nu=1}^{n_0+n} \underline{u_\nu}}{(n_0+n)\,\bar{u}_{n_0+n+1}} - \frac{\sum_{\nu=1}^{n_0} \underline{u_\nu}}{(n_0+n)\,\bar{u}_{n_0+n+1}} \right\}$$

$$> \frac{n_0+n}{n}(A-\varepsilon) > A - \varepsilon > 0,$$

d. h.

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \underline{u'_\nu}}{n} > (A-\varepsilon)\,\bar{u}'_{n+1}.$$

Es sei jetzt $u''_n = u_{n-n_0}$, $n_0 \geqq 1$ fest, $n = n_0+1, n_0+2, \ldots$. Es gibt wie oben ein $N > 0$, so daß für $n > N$ folgendes gilt:

$$(6) \quad \begin{cases} u_{n-n_0+1} > \operatorname{Max}(0, \bar{u}''_{n_0}) \\ \dfrac{\sum_{\nu=1}^{n-n_0} \underline{u_\nu}}{n-n_0} > A\bar{u}_{n-n_0+1}, \quad \left| \dfrac{\sum_{\nu=1}^{n_0} \underline{u''_\nu}}{n\bar{u}''_{n+1}} \right|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad \dfrac{n-n_0}{n} > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2A} \end{cases}$$

mit $0 < \varepsilon < A$.

Andererseits gelten, wie bei (4),

$$(7) \qquad \begin{cases} \underline{u''_\nu} = \underline{u_{\nu-n_0}} \text{ für } \nu = n_0+1, n_0+2, \ldots, \\ \bar{u}''_{n+1} = \bar{u}_{n-n_0+1} \text{ für } n > N. \end{cases}$$

Aus (6) und (7) folgt nun

$$(8) \quad \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \underline{u''_\nu}}{n\bar{u}''_{n+1}} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n_0} \underline{u''_\nu}}{n\bar{u}''_{n+1}} + \frac{\sum_{\nu=n_0+1}^{n} \underline{u''_\nu}}{n\bar{u}''_{n+1}} = \frac{n-n_0}{n} \frac{\sum_{\nu=1}^{n-n_0} \underline{u_\nu}}{(n-n_0)\,\bar{u}_{n-n_0+1}} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n_0} \underline{u''_\nu}}{n\bar{u}''_{n+1}}$$

$$> \left(1 - \frac{\varepsilon}{2A}\right) A - \frac{\varepsilon}{2} = A - \varepsilon > 0,$$

d. h.

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \underline{u''_\nu}}{n} > (A-\varepsilon)\,\bar{u}''_{n+1}.$$

Durch aufeinanderfolgende Anwendung von (5) und (8) gewinnen wir aus Lemma 1 folgende Behauptung:

In einer ausgeglichenen Folge darf man die Werte endlichvieler Anfangsglieder abändern, ohne daß dabei die Ausgeglichenheit beeinträchtigt wird.

Lemma 2. *Es seien $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ zwei nach $+\infty$ divergierende Folgen von reellen Zahlen, für die das Verhältnis $\frac{v_n}{u_n}$ für genügend großes n zwischen zwei festen positiven Zahlen liegt. Wenn die eine dieser Folgen ausgeglichen ist, so ist es auch die andere.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $\{u_n\}$ ausgeglichen ist. Außerdem gilt nach Voraussetzung

$$\begin{cases} 0 < k < \dfrac{v_n}{u_n} < l, \\ u_n > 0,\ v_n > 0 \end{cases} \tag{9}$$

für $n > N \geqq 0$, wobei k, l, N passend zu wählen sind. Nach Lemma 1 können wir nun die ersten N Glieder der beiden Folgen weglassen, d. h. die ursprünglichen Folgen mit $\{u'_n\} = \{u_{N+n}\}$ bzw. $\{v'_n\} = \{v_{N+n}\}$ ersetzen. Aus (9) folgt

$$\underline{v'_n} > k\underline{u'_n} \text{ und } \overline{v'_n} < l\overline{u'_n}. \tag{10}$$

(5) und (10) zusammen liefern nun

$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \underline{v'_\nu}}{n\overline{v'_{n+1}}} > \frac{k}{l}\,\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \underline{u'_\nu}}{n\overline{u'_{n+1}}} > \frac{k}{l}\,(A - \varepsilon) \text{ für genügend großes } n,$$

d. h. $\{v'_n\}$ ist ausgeglichen und folglich $\{v_n\}$ auch.

Lemma 3. *Es seien $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ zwei monoton nicht-abnehmende, nach $+\infty$ divergierende Folgen von reellen Zahlen. Es gelte ferner*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqq \frac{u_{n+1}}{u_n} \tag{11}$$

für genügend großes n. Wenn $\{u_n\}$ ausgeglichen ist, so ist es $\{v_n\}$ auch.

Beweis. Für $n > N \geqq 0$ sei $u_n > 0$, $v_n > 0$ und (11) gültig. Nach der im vorigen Lemma gemachten Bemerkung genügt es, die Folgen $\{u'_n\} = \{u_{N+n}\}$ und $\{v'_n\} = \{v_{N+n}\}$ zu betrachten. Aus (2a), (11) und (5) erhalten wir

$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \underline{v'_\nu}}{n\overline{v'_{n+1}}} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{v'_\nu}{v'_{n+1}} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{v'_\nu}{v'_{\nu+1}} \cdot \frac{v'_{\nu+1}}{v'_{\nu+2}} \cdots \frac{v'_n}{v'_{n+1}} \geqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{u'_\nu}{u'_{\nu+1}} \cdot \frac{u'_{\nu+1}}{u'_{\nu+2}} \cdots \frac{u'_n}{u'_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{u'_\nu}{u'_{n+1}} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \underline{u'_\nu}}{n\overline{u'_{n+1}}} > A - \varepsilon \text{ für genügend großes } n.$$

Um Beispiele ausgeglichener Folgen angeben zu können, führen wir zunächst eine bequeme Bezeichnung ein: Wir betrachten Vektoren $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, 0, \ldots)$ mit nur endlich vielen nicht verschwindenden reellen Komponenten und erklären die Vektoroperationen wie üblich. Es sei $\vec{0}$ der Nullvektor; wir setzen $\vec{\alpha} > \vec{0}$, wenn $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ und die erste nicht verschwindende Komponente von $\vec{\alpha}$ positiv ist, so wie allgemeiner $\vec{\alpha} > \vec{\beta}$, wenn $\vec{\alpha} - \vec{\beta} > \vec{0}$ ist. Setzen wir für hinreichend großes n

$$n^{\vec{\alpha}} = n^{\alpha_0}(\log n)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(k)} n)^{\alpha_k},$$

wo $\log^{(k)} x$ den k-fach iterierten Logarithmus bezeichnet, so ist $u_n = n^{\vec{\alpha}}$ für $\vec{\alpha} > \vec{0}$ ein

Beispiel einer ausgeglichenen Folge. Für späteren Gebrauch vermerken wir die Rechenregel $n^{(\vec{\lambda\alpha}+\vec{\mu\beta})} = (n^{\lambda})^{\vec{\alpha}} \cdot (n^{\mu})^{\vec{\beta}}$ und setzen speziell $\vec{J} = (1, 0, 0, \ldots)$.

B. Definition. Eine Folge $\{z_n\}$ ohne Wiederholung und von lauter algebraischen Zahlen nennen wir eine *vergleichbare Stellenfolge*, wenn es eine Stelle ζ, die nicht notwendig algebraisch zu sein braucht, und eine positive Zahl c derart gibt, daß

$$|z_n - \zeta| \leqq \frac{1}{h_n^c} \tag{12}$$

für genügend großes n gilt, wobei h_n die Höhe von z_n bezeichnet.

Jede vergleichbare Stellenfolge $\{z_n\}$, bei der die Grade der Glieder unter einer festen Schranke liegen, ist konvergent mit dem Limes ζ.

Eine gegen Null konvergente wiederholungsfreie Folge $\{z_n\}$ rationaler Zahlen $z_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit $p_n = O(|q_n|_\infty^\alpha)$ und $\alpha < 1$ ist ein Beispiel einer vergleichbaren Stellenfolge mit $\zeta = 0$ und einem c, daß der Relation $0 < c < 1 - \alpha$ genügt. Ein weiteres Beispiel bilden die Näherungsbrüche $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ des regelmäßigen Kettenbruchs einer reellen Irrationalzahl ζ.

Für den Satz I, welcher den Hauptsatz dieser Arbeit bildet, sind folgende Interpolationsstellenfolgen von Wichtigkeit:

C. Definition. Es sei $\{z_n\}$ eine Folge von algebraischen Zahlen und jeweils h_n die Höhe von z_n. Wir nennen $\{z_n\}$ eine *zulässige (Interpolations-)Stellenfolge*, wenn

1. $\{z_n\}$ eine vergleichbare Stellenfolge von beschränktem Grad (d. h. die Grade sämtlicher z_n bleiben unter einer festen Schranke) und

2. $\{\log h_n\}$ eine ausgeglichene Folge ist.

Beispiele von zulässigen Stellenfolgen $\{z_n\}$ sind $z_n = \frac{1}{n}$, $z_n = \frac{1}{a^n}$ mit einer natürlichen Zahl $a > 1$ und die Folge der Näherungsbrüche $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ des regelmäßigen Kettenbruchs einer reellen Irrationalzahl ζ, sofern dieser beschränkte Teilnenner besitzt (z. B. ein periodischer Kettenbruch).

§ 2. Einige Hilfssätze.

In diesem Paragraphen stellen wir einige Hilfssätze zusammen, die bei den Beweisen der Sätze I bis III benutzt werden.

Hilfssatz 1. *Zwischen der Höhe h einer algebraischen Zahl α und ihrem Absolutbetrag $|\alpha|_\infty$ besteht die Beziehung*

$$|\alpha|_\infty < \frac{h}{|a_0|_\infty} + 1. \tag{1}$$

Den Beweis dieses wohlbekannten Satzes können wir uns ersparen.

Hilfssatz 2. (Siegel [13], S. 176). *Es sei*

$$P(x) = k_0 + \cdots + k_n x^n$$

ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, das im Körper der rationalen Zahlen reduzibel ist, und

$$P(x) = (k_0' + \cdots + k_{n'}' x^{n'})\, Q(x),\ 0 < n' < n,\ (k_0', \ldots, k_{n'}') = 1$$

eine Zerlegung von $P(x)$. Setzt man

$$\mathrm{Max}\,(|k_0|_\infty, \ldots, |k_n|_\infty) = k,\ \mathrm{Max}\,(|k_0'|_\infty, \ldots, |k_{n'}'|_\infty) = k',$$

so gilt

$$k' \leqq n!k. \tag{2}$$

Hilfssatz 3 (Siegel [14], S. 7, Schneider [10], Kap. I, § 1). *Das lineare Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\mu\nu} x_\nu = 0, \ \mu = 1, \ldots, m; \quad n > m \tag{3}$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten $\alpha_{\mu\nu}$ besitzt eine nichttriviale Lösung in ganzen rationalen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ mit der Eigenschaft

$$|x_\nu|_\infty \leqq \left[(nB)^{\frac{m}{n-m}} + 1\right], \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Dabei ist $B = \operatorname{Max}_{\mu,\nu}(|\alpha_{\mu\nu}|_\infty)$. Ist insbesondere $n > 2m$, so gilt

$$|x_\nu|_\infty \leqq nB. \tag{5}$$

Hilfssatz 4 (Schneider [11], S. 61). *Es sei α eine algebraische Zahl, die der Minimalgleichung $\sum_{\varkappa=0}^{\sigma} a_\varkappa z^\varkappa = 0$ genügen möge und λ eine beliebige nicht negative ganze Zahl. Für α^λ gilt die Darstellung*

$$\alpha^\lambda = a_\sigma^{-\lambda}(d_{0,\lambda} + d_{1,\lambda}\alpha + \cdots + d_{\sigma-1,\lambda}\alpha^{\sigma-1}) \tag{6}$$

mit ganzen rationalen $d_{0,\lambda}, \ldots, d_{\sigma-1,\lambda}$. Es gilt ferner

$$|d_{\varkappa,\lambda}|_\infty \leqq (2h)^\lambda \qquad (\varkappa = 0, \ldots, \sigma - 1), \tag{7}$$

wobei h die Höhe von α bezeichnet, d. h. $h = \operatorname{Max}_{\varkappa=0,\ldots,\sigma} |a_\varkappa|_\infty$.

Hilfssatz 5. *Es seien die Reihen*

$$f_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(k)}(z - \zeta)^j \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{8}$$

der N analytischen Funktionen $f_k(z)$ für $|z - \zeta| = r$ absolut konvergent und die N Konstanten M_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ so gewählt, daß

$$|a_j^{(k)}|\, r^j \leqq M_k \qquad (j = 0, 1, \ldots; k = 1, 2, \ldots, N) \tag{9}$$

gilt. Dann ist der Ausdruck

$$\Phi(z) = \sum_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_N=0,0,\ldots,0}^{m_1,m_2,\ldots,m_N} c_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N} (f_1(z))^{m_1}(f_2(z))^{\mu_2}\cdots(f_N(z))^{\mu_N} \tag{10}$$

in eine für $|z - \zeta| \leqq r$ konvergente Potenzreihe entwickelbar,

$$\Phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j(z - \zeta)^j, \tag{11}$$

für deren Koeffizienten d_j die Abschätzung

$$|d_j| < \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{M}_1^{m_1} \cdot \mathfrak{M}_2^{m_2} \cdots \mathfrak{M}_N^{m_N} \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^j \qquad (j = 0, 1, \ldots). \tag{12}$$

gilt. Dabei ist gesetzt

$$\begin{cases} |c_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}| \leqq \mathfrak{C} & (\mu_1 = 0, \ldots, m_1;\ \mu_2 = 0, \ldots, m_2;\ \mu_N = 0, \ldots, m_N), \\ \mathfrak{M}_k = 4\operatorname{Max}(1, M_k) & (k = 1, 2, \ldots, N). \end{cases} \tag{13}$$

Beweis. Setzen wir $z - \zeta = \hat{z}$. Nach (9) wird $f_k(z)$ $(k = 1, \ldots, N)$ wie folgt majorisiert:

$$f_k(z) \ll \frac{M}{1 - \frac{\hat{Z}}{r}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{14}$$

Aus (13) und (14) folgt nun für $\Phi(z)$

$$(15)\quad \Phi(z) \ll \mathfrak{C} \cdot \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N = 0, 0, \ldots, 0}^{m_1, m_2, \ldots, m_N} M_1^{\mu_1} M_2^{\mu_2} \cdots M_N^{\mu_N} \left(1 - \frac{\hat{Z}}{r}\right)^{-(m_1 + m_2 + \cdots + m_N)}$$

$$\ll \mathfrak{C} \cdot (m_1 + 1) \cdots (m_N + 1) \cdot (\mathrm{Max}(1, M_1))^{m_1} \cdots (\mathrm{Max}(1, M_N))^{m_N} \left(1 - \frac{\hat{Z}}{r}\right)^{-(m_1 + \cdots + m_N}.$$

Aus $\binom{\mu + j - 1}{j} < 2^{\mu + j}$ folgt aber

$$(16)\qquad \left(1 - \frac{\hat{Z}}{r}\right)^{-\mu} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\mu + j - 1}{j} \left(\frac{\hat{Z}}{r}\right)^j \ll 2^\mu \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\hat{Z}}{\frac{r}{2}}\right)^j.$$

Aus (15), (16) mit $\mu = m_1 + \cdots + m_N$, $m_k + 1 \leqq 2^{m_k}$ und der 2. Hälfte von (13) ergibt sich

$$(17)\quad \Phi(z) \ll \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{M}_1^{m_1} \cdots \mathfrak{M}_N^{m_N} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\hat{Z}}{\frac{r}{2}}\right)^j \text{ mit } \mathfrak{M}_k = 4\,\mathrm{Max}(1, M_k) \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

woraus (12) zu entnehmen ist.

Hilfssatz 6. *Es sei $\Phi(z)$ wie oben bei Hilfssatz 5 beschaffen. Außerdem habe es in dem kleineren konzentrischen Kreis $|z - \zeta| < \frac{r}{8}$ die Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Dann gilt für alle z mit $|z - \zeta| < \frac{r}{8}$ und $z \neq z_1, z_2, \ldots, z_n$ die folgende obere Abschätzung:*

$$(18)\qquad \left|\frac{\Phi(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_\nu)}\right| < \mathfrak{C} \cdot \gamma_1^{m_1} \cdots \gamma_N^{m_N} \cdot \gamma_0^\nu \qquad (\nu \leqq n_1),$$

wobei $\mathfrak{C}$ dieselbe Bedeutung hat wie bei (13) und $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N \geqq 1$ zwar von ζ, r und $f_k(z)$ $(k = 1, \ldots, N)$ abhängig, aber von $c_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N}$ und ν unabhängig sind.

Beweis. Durch Induktion beweisen wir zunächst die Formel

$$(19)\quad \frac{\Phi(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_\nu)} = \sum_{j=\nu}^{\infty} d_j \left(\sum_{\substack{q_0 + q_1 + \cdots + q_\nu = j - \nu \\ q_0, q_1, \ldots, q_\nu \geqq 0}} \hat{z}^{q_0} \hat{z}_1^{q_1} \cdots \hat{z}_\nu^{q_\nu}\right) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Nach (11) und der Voraussetzung gelten nämlich

$$\Phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \hat{z}^j,$$

$$0 = \Phi(z_1) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \hat{z}_1^j.$$

Durch Subtraktion und darauffolgende Division mit $z - z_1 = \hat{z} - \hat{z}_1$ erhalten wir

$$(20)\qquad \frac{\Phi(z)}{z - z_1} = \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{z}_1^{j-1} + \hat{z}_1^{j-2}\hat{z} + \cdots + \hat{z}_1 \hat{z}^{j-2} + \hat{z}^{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} d_j \left(\sum_{\substack{q_0 + q_1 = j - 1 \\ q_0, q_1 \geqq 0}} \hat{z}^{q_0} \hat{z}_1^{q_1}\right),$$

d. h. (19) für $\nu = 1$.

Gesetzt, (19) sei richtig für ein ν mit $1 \leqq \nu < n_1$. Es gilt laut der Voraussetzung $\Phi(z_{\nu+1}) = 0$, weil noch $\nu + 1 \leqq n_1$ ist. Setzen wir $z = z_{\nu+1}$ in (19) ein, so erhalten wir

$$(21) \qquad 0 = \sum_{j=\nu}^{\infty} d_j \left(\sum_{\substack{q_0+q_1+\quad+q_\nu=j-\nu \\ q_0,q_1,\ldots,q_\nu \geqq 0}} \hat{z}_{\nu+1}^{q_0} \hat{z}_1^{q_1} \cdots \hat{z}_\nu^{q_\nu} \right).$$

Die Subtraktion von (21) von (19) und Division mit $z - z_{\nu+1} = \hat{z} - \hat{z}_{\nu+1}$ liefert uns

$$(22) \qquad \frac{\Phi(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_\nu)(z-z_{\nu+1})}$$

$$= \sum_{j=\nu+1}^{\infty} d_j \left(\sum_{\substack{q_1+q_2+\cdots+q_\nu=i \\ q_1,q_2,\ldots,q_\nu \geqq 0}} \hat{z}_1^{q_1} \hat{z}_2^{q_2} \cdots \hat{z}_\nu^{q_\nu} \left(\sum_{\substack{q_0+q_{\nu+1}=j-\nu-i-1 \\ q_0,q_{\nu+1} \geqq 0}} \hat{z}^{q_0} \hat{z}_{\nu+1}^{q_{\nu+1}} \right) \right)$$

$$= \sum_{i=\nu+1}^{\infty} d_j \left(\sum_{\substack{q_0+q_1+\cdots+q_{\nu+1}=i-\nu-1 \\ q_0,q_1,\ldots,q_{\nu+1} \geqq 0}} \hat{z}^{q_0} \hat{z}_1^{q_1} \cdots \hat{z}_{\nu+1}^{q_{\nu+1}} \right).$$

Das ist aber gerade die Formel (19) mit $\nu + 1$ an Stelle von ν.

Die innere Summe in (19) ist also ein Polynom in $z, z_1, \ldots, z_\nu$, welches homogen vom Grade $j - \nu$ $(j \geqq \nu)$ ist und dessen Koeffizienten alle gleich 1 sind. Die Anzahl der Glieder dieses Polynoms ist bekanntlich $\binom{(\nu+1)+(j-\nu)-1}{j-\nu} = \binom{j}{j-\nu} = \binom{j}{\nu}$.

Hiernach gilt für $|\hat{z}| < \frac{r}{8}$

$$(23) \qquad \left| \sum_{\substack{q_0+q_1+\cdots+q_\nu=i-\nu \\ q_0,q_1,\ldots,q_\nu \geqq 0}} \hat{z}^{q_0} \hat{z}_1^{q_1} \cdots \hat{z}_\nu^{q_\nu} \right| < \binom{j}{\nu} \left(\frac{r}{8}\right)^{j-\nu} < 2^j \left(\frac{r}{8}\right)^{j-\nu} \text{ für } j \geqq \nu.$$

Aus (19) und (23) ergibt sich nun

$$(24) \qquad \left| \frac{\Phi(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_\nu)} \right| \leqq \sum_{j=\nu}^{\infty} |d_j| \, 2^j \left(\frac{r}{8}\right)^{j-\nu} = \left(\frac{8}{r}\right)^\nu \sum_{j=\nu}^{\infty} |d_j| \left(\frac{r}{4}\right)^j \text{ für } |z-\zeta| < \frac{r}{8}.$$

Die absolute Konvergenz der rechtsstehenden Reihen ist klar. Aus (24) und der Relation (12) von Hilfssatz 5 erhalten wir

$$\left| \frac{\Phi(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_\nu)} \right| < \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{M}_1^{m_1} \cdots \mathfrak{M}_N^{m_N} \left(\frac{8}{r}\right)^\nu \sum_{j=\nu}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \leqq \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{M}_1^{m_1} \cdots \mathfrak{M}_N^{m_N} \cdot \left(\frac{8}{r}\right)^\nu.$$

Das ist aber nichts anderes als (18) mit $\gamma_k = \mathfrak{M}_k$ $(k = 1, \ldots, N)$ und $\gamma_0 = \operatorname{Max}\left(1, \frac{8}{r}\right)$.

Für einen völlig anderen Beweis des wichtigen Hilfssatzes 6 siehe den Anhang.

Hilfssatz 7. *Für eine ganze rationale Zahl χ gilt*

$$(25) \qquad \frac{1}{|\chi|_\infty} \leqq |\chi|_p.$$

Diese fast triviale Aussage läßt sich wie folgt beweisen: Es sei $\chi = \pm p^\varrho p_1$ die Faktorzerlegung von χ, wobei die zu p teilerfremden Faktoren in p_1 aufgenommen worden sind. Danach ist $|\chi|_p = p^{-\varrho} \geqq \frac{1}{p^\varrho p_1} = \frac{1}{|\chi|_\infty}$, da $p_1 \geqq 1$ ist.

§ 3. Ein Kriterium für die Algebraizität i. a. S. einer analytischen Funktion.

Satz I. *Es sei $f(z)$ eine im Punkte $z = \zeta$ reguläre analytische Funktion. Die Funktionswerte $\{f(z_n)\}$ für eine nach ζ konvergierende zulässige Folge $\{z_n\}$ aus dem Definitionsbereich von $f(z)$ mögen folgenden Bedingungen genügen:*

a) *Die $f(z_n)$ sind lauter algebraische Zahlen von beschränktem Grad (etwa $\leqq t$, $t > 0$ fest).*

b) *Es gilt*

$$\log H_n = o(n \log h_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

wobei H_n die Höhe von $f(z_n)$ bezeichnet.

Dann ist $f(z)$ eine algebraische Funktion i. a. S. von z.

Umgekehrt hat die Folge $\{f(z_n)\}$ der Funktionswerte einer algebraischen Funktion i. a. S. $f(z)$ die Eigenschaften a) *und* b) *für jede gegen eine reguläre Stelle ζ von $f(z)$ konvergente Folge $\{z_n\}$ algebraischer Zahlen beschränkten Grades.*

Das 1. Schneidersche Algebraizitätskriterium ist als Spezialfall für das komplexe Gebiet mit der Interpolationsstellenfolge $\{z_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ im obigen Satz enthalten. (Schneider [11], vgl. auch § 1 C.)

Beweis der Hinlänglichkeit. Die Zulässigkeit von $\{z_n\}$ besagt:

1. $\{z_n\}$ ist vergleichbar vom beschränktem Grad, d. h.

(1) die Zahlen z_n sind für $n = 1, 2, \ldots$ algebraisch und voneinander verschieden;

(2) es gibt eine positive reelle Zahl c derart, daß für genügend großes n

$$|z_n - \zeta| \leqq \frac{1}{h_n^c}$$

gilt;

(3) es gibt eine positive reelle Zahl s derart, daß der Grad von z_n für alle $n = 1, 2, \ldots$ immer $\leqq s$ ist.

Außerdem folgt nach dem im § 1 B Gesagten aus (1) und (3)

$$h_n \to +\infty \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

2. $\{\log h_n\}$ ist ausgeglichen, d. h.

(5) es gibt ein $A > 0$ derart, daß für genügend großes n

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \log h_\nu\right) / n \log \bar{h}_{n+1} > A$$

gilt.

Wir können jetzt ein $N_0 \geqq 0$ so wählen, daß für $n > N_0$ sowohl (2) wie auch

$$|z_n - \zeta| < \frac{r}{8} \tag{6}$$

gilt, wobei r eine positive reelle Zahl bedeutet derart, daß die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ an der Stelle $z = \zeta$ für $|z - \zeta| \leqq r$ absolut konvergent ist. (6) folgt aus (2) und (4) (d. h. aus $z_n \to \zeta$ für $n \to \infty$).

Nun lassen wir die ersten N_0 Glieder der Folge $\{z_n\}$ weg und setzen

$$z'_n = z_{N_0+n}, \quad h'_n = h_{N_0+n}, \quad H'_n = H_{N_0+n} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Für die Folge $\{z'_n\}$ gelten (2) und (6) von $n = 1$ ab, (1), (3) und (4) bleiben unverändert und (5) wird ersetzt durch

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \log h'_\nu\right) / n \log h'_{n+1} > A - \varepsilon \tag{7}$$

für genügend großes n mit beliebig kleinem ε, $0 < \varepsilon < A$.

Die Bedingungen a) und b) der Voraussetzung werden offenbar auch von $\{z_n'\}$ erfüllt, wenn sie von $\{z_n\}$ erfüllt sind. Dem folgenden Beweis werden wir die Folge $\{z_n'\}$ zugrunde legen und da von der Folge $\{z_n\}$ kein Gebrauch mehr gemacht wird, ist keine Verwechslung zu befürchten, wenn wir den $'$ in z_n', h_n' und H_n' weglassen.

Wir stellen jetzt ein Polynom

$$\Phi(z) = \sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} z^\lambda (f(z))^\mu \tag{8}$$

in z, $f(z)$ auf mit zunächst unbestimmten ganzen rationalen l, m, $c_{\lambda\mu}$ ($l \geqq 0$, $m > 0$) und sorgen dafür, daß $\Phi(z_\nu) = 0$ wird für $\nu = 1, 2, \ldots$. Wir folgern aus den Voraussetzungen des Satzes, daß für hinreichend großes, aber festes n auch $\Phi(z_{n+k}) = 0$ ist für alle $k = 1, 2, \ldots$. Da $\Phi(z)$ offenbar mit $f(z)$ analytisch ist, so folgt nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen, welcher für beiderlei Bewertungen gilt, $\Phi(z) \equiv 0$ im ganzen Definitionsbereich von $f(z)$.

Zur Ausführung dieses Planes setzen wir $z_\nu = \alpha_\nu$ und $f(z_\nu) = \beta_\nu$. Es seien

$$\begin{cases} a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)}\alpha_\nu + \cdots + a_{\sigma_\nu}^{(\nu)}\alpha_\nu^{\sigma_\nu} = 0, & a_{\sigma_\nu}^{(\nu)} \neq 0, \quad \sigma_\nu \leqq s \\ b_0^{(\nu)} + b_1^{(\nu)}\beta_\nu + \cdots + b_{\tau_\nu}^{(\nu)}\beta_\nu^{\tau_\nu} = 0, & b_{\tau_\nu}^{(\nu)} \neq 0, \quad \tau_\nu \leqq t \end{cases} \tag{9}$$

die jeweiligen Minimalgleichungen für α_ν, β_ν. Nach Hilfssatz 4 aus § 2 gelten für die Potenzen α_ν^λ, β_ν^μ die Darstellungen

$$\begin{cases} \alpha_\nu^\lambda = a_{\sigma_\nu}^{(\nu)-\lambda}(d_{0,\lambda}^{(\nu)} + d_{1,\lambda}^{(\nu)}\alpha_\nu + \cdots + d_{\sigma_\nu-1,\lambda}^{(\nu)}\alpha_\nu^{\sigma_\nu-1}), & \lambda = 0, 1, 2, \ldots, \\ \beta_\nu^\mu = b_\tau^{(\nu)-\mu}(\delta_{0,\mu}^{(\nu)} + \delta_{1,\mu}^{(\nu)}\beta_\nu + \cdots + \delta_{\tau_\nu-1,\mu}^{(\nu)}\beta_\nu^{\tau_\nu-1}), & \mu = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{10}$$

wobei d, δ ganze rationale Zahlen sind mit den Abschätzungen

$$\begin{cases} |d_{\varkappa,\lambda}^{(\nu)}|_\infty \leqq (2h_\nu)^\lambda, & \varkappa = 0, \ldots, \sigma_\nu - 1, \\ |\delta_{\varkappa',\mu}^{(\nu)}|_\infty \leqq (2H_\nu)^\mu, & \varkappa' = 0, \ldots, \tau_\nu - 1 \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Außer (11) gilt nach Definition der Höhe

$$\begin{cases} |a_{\sigma_\nu}^{(\nu)}|_\infty \leqq h_\nu \\ |b_{\tau_\nu}^{(\nu)}|_\infty \leqq H_\nu \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Unter geeigneter Wahl von l, m, $c_{\lambda\mu}$ ($\lambda = 0, \ldots, l$; $\mu = 0, \ldots, m$) lassen wir jetzt $\Phi(z_\nu)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ verschwinden. Wie diese Wahl zu geschehen hat, wird unten gezeigt.

Mit den Werten von α_ν^λ, β_ν^μ aus (10) wird

$$\Phi(z_\nu) = \sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu}\alpha_\nu^\lambda\beta_\nu^\mu = \sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} a_{\sigma_\nu}^{(\nu)-\lambda}\left(\sum_{\varkappa=0}^{\sigma_\nu-1} d_{\varkappa,\lambda}^{(\nu)}\alpha_\nu^\varkappa\right) b_{\tau_\nu}^{(\nu)-\mu}\left(\sum_{\varkappa'=0}^{\tau_\nu-1}\delta_{\varkappa',\mu}^{(\nu)}\beta_\nu^{\varkappa'}\right), \tag{13}$$

d. h.

$$\Phi(z_\nu) = \sum_{\varkappa,\varkappa'=0,0}^{\sigma_\nu-1,\,\tau_\nu-1} \alpha_\nu^\varkappa\beta_\nu^{\varkappa'}\left(\sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} a_{\sigma_\nu}^{(\nu)-\lambda} b_{\tau_\nu}^{(\nu)-\mu} d_{\varkappa,\lambda}^{(\nu)}\delta_{\varkappa',\mu}^{(\nu)}\right). \tag{14}$$

Hiernach genügt es,

$$\sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} a_{\sigma_\nu}^{(\nu)-\lambda} b_{\tau_\nu}^{(\nu)-\mu} d_{\varkappa,\lambda}^{(\mu)}\delta_{\varkappa',\mu}^{(\nu)} = 0 \text{ für } \begin{cases} \varkappa = 0, \ldots, \sigma_\nu - 1 \\ \varkappa' = 0, \ldots, \tau_\nu - 1 \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

zu setzen, damit $\Phi(z_\nu) = 0$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ wird. Wir machen die linke Seite von (15) ganz rational, indem wir sie mit $a_{\sigma_\nu}^{(\nu)l} b_{\tau_\nu}^{(\nu)m}$ multiplizieren:

$$\sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} (a_{\sigma_\nu}^{(\nu)l-\lambda} b_{\tau_\nu}^{(\nu)m-\mu} d_{\varkappa,\lambda}^{(\nu)}\delta_{\varkappa',\mu}^{(\nu)})\, c_{\lambda\mu} = 0 \tag{16}$$

für dieselben Werte von $\varkappa$, $\varkappa'$, ν wie in (15). Setzen wir

$$a_{\sigma_\nu}^{(\nu)l-\lambda} b_{\tau_\nu}^{(\nu)m-\mu} d_{\varkappa,\lambda}^{(\nu)} \delta_{\varkappa',\mu}^{(\nu)} = K_{\lambda\mu;\varkappa,\varkappa';\nu}, \tag{17}$$

so wird (16) abgekürzt zu

$$\sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} K_{\lambda\mu;\varkappa,\varkappa';\nu} c_{\lambda\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} \varkappa = 0, \ldots, \sigma_\nu - 1 \\ \varkappa' = 0, \ldots, \tau_\nu - 1 \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

(18) ist ein lineares System in $(l+1)(m+1)$ Unbekannten $c_{\lambda\mu}$, dessen Gleichungsanzahl $\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu \tau_\nu \leqq nst$ ist. Außerdem sind die Koeffizienten $K_{\lambda\mu;\varkappa,\varkappa';\nu}$ ganze rationale Zahlen, deren Absolutbeträge wie folgt abgeschätzt werden:

Nach (17), (11) und (12) gilt

$$| K_{\lambda\mu;\varkappa,\varkappa';\nu} |_\infty \leqq 2^{l+m} h_\nu^l H_\nu^m \leqq 2^{l+m} \bar{h}_n^l \bar{H}_n^m \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Wir wählen jetzt ein $N_1 \geqq 0$ so, daß für $n > N_1$ gilt

$$\log H_n < qn \log h_n \tag{20}$$

mit einer positiven Konstanten q, welche den Ungleichungen

$$\begin{cases} q \leqq 2st \\ q < \dfrac{c^2(A-\varepsilon)^2}{128 s^3 t^3} \end{cases} \tag{21}$$

genügt.

Das ist nach der Bedingung b) der Voraussetzung möglich. Darauf wählen wir ein $N_2 \geqq N_1$ so, daß für $n > N_2$

$$\log \bar{H}_{N_1} < qn \log h_n \tag{22}$$

gilt.

Das ist auch möglich, weil $qn \log h_n \to +\infty$ mit $n \to \infty$ (vgl. (4)). Aus (20) und (22) folgt die Gültigkeit der Ungleichung

$$\log \bar{H}_n < qn \log \bar{h}_n \quad \text{für} \quad n > N_2. \tag{23}$$

Denn (22) ergibt $\log H_\nu < qn \log h_n \leqq qn \log \bar{h}_n$ für $\nu = 1, 2, \ldots, N_1$, wenn $n > N_2$, und (20) ergibt $\log H_\nu < q\nu \log h_\nu \leqq qn \log \bar{h}_n$ für $\nu = N_1 + 1, \ldots, N$, wenn $n > N_1$, also erst recht, wenn $n > N_2$ ist.

Unter Benutzung von (23) wird (19) zu

$$| K_{\lambda\mu;\varkappa,\varkappa';\nu} |_\infty \leqq 2^{l+m} e^{l \log \bar{h}_n + m \log \bar{H}_n} < 2^{l+m} e^{(l+qnm) \log \bar{h}_n} \tag{24}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, wobei $n > N_2$ ist.

Jetzt wählen wir die anfangs unbestimmt gelassenen Grade l, m von $\Phi(z)$ nach z bzw. $w = f(z)$ wie folgt:

$$l = [\sqrt{2stqn}], \quad m = \left[\sqrt{\frac{2st}{q}}\right]. \tag{25}$$

Laut (21) ist also $m \geqq 1$, d. h. in $\Phi(z)$ kommt $w = f(z)$ wirklich vor. Diese Werte von l, m genügen der Beziehung

$$(l+1)(m+1) > 2nst. \tag{26}$$

Danach wird (17) zu einem linearen System mit ganzen rationalen Koeffizienten, dessen Gleichungsanzahl die doppelte Anzahl der Unbekannten übertrifft. Also besitzt dieses

System nach Hilfssatz 3 aus § 2 eine nichttriviale Lösung in ganzen rationalen Zahlen $c_{\lambda\mu}$, deren Absolutbeträge folgender Einschränkung unterworfen sind:

$$(27) \qquad |c_{\lambda\mu}|_\infty < (l+1)(m+1)\,\mathrm{Max}\,|K_{\lambda\mu;\varkappa,\varkappa';\nu}|_\infty .$$

Mit Hilfe von (24) folgt hieraus

$$(28) \quad |c_{\lambda\mu}|_\infty < (l+1)(m+1)\,2^{l+m} e^{(l+qnm)\log \bar{h}_n} \leqq 4^{l+m} e^{(l+qnm)\log \bar{h}_n} \text{ für } n > N_2 .$$

Da als Folge von (25) $l + qnm \leqq 2\sqrt{2stqn}$ ist, wird (28) zu

$$(29) \qquad |c_{\lambda\mu}|_\infty < C(n) \text{ für } n > N_2$$

mit

$$(30) \qquad C(n) = 4^l \cdot 4^m \cdot e^{2\sqrt{2stqn}\log \bar{h}_n} .$$

Da die $c_{\lambda\mu}$ ganze rationale Zahlen sind, gilt immer $|c_{\lambda\mu}|_p \leqq 1$. Andererseits ist laut (30) $C(n) > 1$, woraus $|c_{\lambda\mu}|_p < C(n)$ folgt. Diese letzte Ungleichung läßt sich mit (29) zu

$$(31) \qquad |c_{\lambda\mu}| < C(n)$$

vereinigen.

Nach der obigen Wahl von $l, m, c_{\lambda\mu}$ als Funktionen von n zeigen wir, daß aus $\Phi(z_1) = 0, \Phi(z_2) = 0, \ldots, \Phi(z_{n_1}) = 0$ das Verschwinden von $\Phi(z_{n_1+1})$ folgt für alle $n_1 \geqq n$ bei festem, aber genügend großem n. Zu diesem Zweck nehmen wir

$$\Phi(z_1) = 0, \ldots, \Phi(z_{n_1}) = 0,$$

aber $\Phi(z_{n_1+1}) \neq 0$ an und leiten daraus einen Widerspruch her. Nachdem das geschehen, brauchen wir nur noch das Prinzip der vollständigen Induktion anzuwenden, um daraus auf die Gültigkeit von $\Phi(z_\nu) = 0$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots$ zu schließen. Nach dem am Anfang Gesagten sind wir dann mit dem Beweis des Satzes fertig.

Wir wollen zunächst $|\Phi(z_{n_1+1})|$ *nach oben abschätzen.* Nach dem vorigen Absatz genügt $\Phi(z)$ allen Voraussetzungen des Hilfssatzes 6 aus § 2 mit $N = 2$, $f_1(z) = z$, $f_2(z) = f(z)$, $m_1 = l$, $m_2 = m$, $\mathfrak{C} = C(n)$. In diesem Spezialfall und für $\nu = n_1$ lautet die Formel (18) von § 2

$$(32) \qquad \left|\frac{\Phi(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_{n_1})}\right| < C(n)\cdot\gamma_1^l\cdot\gamma_2^m\cdot\gamma_0^{n_1} \text{ für } |z-\zeta| < \frac{r}{8}$$

mit $\gamma_0, \gamma_1, \beta_2 \geqq 1$, woraus durch Einsetzung $z = z_{n_1+1}$

$$(33) \qquad \left|\frac{\Phi(z_{n_1+1})}{(z_{n_1+1}-z_1)\cdots(z_{n_1+1}-z_{n_1})}\right| < C(n)\cdot\gamma_1^l\cdot\gamma_2^m\cdot\gamma_0^{n_1}$$

folgt. Mit Berücksichtigung der Gültigkeit von (2) für die normierte Folge $\{z_n\}$ von $n = 1$ ab finden wir

$$(34) \quad |z_{n_1+1}-z_j| \leqq |z_{n_1+1}-\zeta| + |z_j-\zeta| \leqq \frac{1}{h^c_{n_1+1}} + \frac{1}{h^c_j} \leqq \frac{2}{\underline{h^c_j}} \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n_1 .$$

Aus (33) und (34) folgt nun

$$(35) \qquad |\Phi(z_{n_1+1})| < C(n)\,\gamma_1^l\,\gamma_2^m\,\gamma_0^{n_1}\,\frac{2^{n_1}}{(\underline{h_1}\cdot\underline{h_2}\cdots\underline{h_{n_1}})^c} .$$

Mit Hilfe von (30) erhalten wir nach Vereinfachung

$$(36) \qquad |\Phi(z_{n_1+1})| < e^{2\sqrt{2stqn}\log \bar{h}_n}\cdot\gamma_4^l\,\gamma_5^m\,\gamma_6^{n_1}(\underline{h_1}\cdot\underline{h_2}\cdots\underline{h_{n_1}})^{-c}$$

mit $\gamma_4 = 4\gamma_1 > 1$, $\gamma_5 = 4\gamma_2 > 1$, $\gamma_6 = 2\gamma_0 > 1$.

Es muß hinzugefügt werden, daß (36) für $n_1 \geqq n > N_2$ gilt. Damit ist die obere Abschätzung von $|\Phi(z_{n_1+1})|$ geleistet.

Für $\nu = n_1 + 1$ ergibt sich aus (8) und (9), daß

$$\Phi(z_{n_1+1}) = \sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} z_{n_1+1}^{\lambda} (f(z_{n_1+1}))^{\mu} = \sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} \alpha_{n_1+1}^{\lambda} \beta_{n_1+1}^{\mu} \tag{37}$$

eine algebraische Zahl von höchstens $\sigma_{n_1+1}\tau_{n_1+1}$-tem Grade und

$$\Psi(z_{n_1+1}) = \left(a_{\sigma_{n_1+1}}^{(n_1+1)}\right)^l \left(b_{\tau_{n_1+1}}^{(n_1+1)}\right)^m \Phi(z_{n_1+1}) \tag{38}$$

eine ganze algebraische Zahl von demselben Grade wie $\Phi(z_{n_1+1})$ ist.

Es seien jetzt

$$\begin{cases} \overset{1}{\alpha}_{n_1+1} = \alpha_{n_1+1}, \overset{2}{\alpha}_{n_1+1}, \ldots, \overset{\sigma_{n_1+1}}{\alpha}_{n_1+1} \text{ das System der Konjugierten von } \alpha_{n_1+1}, \\ \overset{1}{\beta}_{n_1+1} = \beta_{n_1+1}, \overset{2}{\beta}_{n_1+1}, \ldots, \overset{\tau_{n_1+1}}{\beta}_{n_1+1} \text{ dasjenige von } \beta_{n_1+1}. \end{cases} \tag{39}$$

Es sei ferner

$$\begin{cases} \overset{ij}{\Psi} = \left(a_{\sigma_{n_1+1}}^{(n_1+1)}\right)^l \left(b_{\tau_{n_1+1}}^{(n_1+1)}\right)^m \sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} \left(\overset{i}{\alpha}_{n_1+1}\right)^{\lambda} \left(\overset{j}{\beta}_{n_1+1}\right)^{\mu} \\ \text{mit } i = 1, \ldots, \sigma_{n_1+1}; \quad j = 1, \ldots, \tau_{n_1+1} \end{cases} \tag{40}$$

gesetzt. Diese $\overset{ij}{\Psi}$ sind auch ganze algebraische Zahlen; sie sind konjugiert zu $\overset{11}{\Psi} = \Psi$, und ihr Produkt $\chi = \prod_{i,j=1,1}^{\sigma_{n_1+1},\ \tau_{n_1+1}} \overset{ij}{\Psi}$ ist eine ganze rationale Zahl. Da $\Phi(z_{n_1+1}) \neq 0$ angenommen wurde, ist auch $\Psi(z_{n_1+1}) \neq 0$ und folglich $\chi \neq 0$.

Wir schätzen jetzt $|\chi|$ nach oben und nach unten ab:

Es gilt im komplexen Gebiet nach (38), (36) und (12) für $\nu = n_1 + 1$

$$|\overset{11}{\Psi}|_\infty = |\Psi|_\infty < \bar{h}_{n_1+1}^l \bar{H}_{n_1+1}^m e^{2\sqrt{2stq}\, n \log \bar{h}_n} \cdot \gamma_4^l \gamma_5^m \gamma_6^{n_1} (\underline{h_1} \cdot \underline{h_2} \cdots \underline{h_{n_1}})^{-c}. \tag{41}$$

Außerdem gilt für alle (i, j)

$$|\overset{ij}{\Psi}|_\infty < |a_{\sigma_{n_1+1}}^{(n_1+1)}|_\infty^l \, |b_{\tau_{n_1+1}}^{(n_1+1)}|_\infty^m \sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} |c_{\lambda\mu}|_\infty \, |\overset{i}{\alpha}_{n_1+1}|_\infty^{\lambda} \, |\overset{j}{\beta}_{n_1+1}|_\infty^{\mu}. \tag{42}$$

Der Hilfssatz 1 von § 2 zusammen mit (12) gibt aber

$$\begin{cases} |\overset{i}{\alpha}_{n_1+1}|_\infty < \dfrac{2h_{n_1+1}}{|a_{\sigma_{n_1+1}}^{(n_1+1)}|_\infty} & (i = 1, \ldots, \sigma_{n_1+1}), \\ |\overset{j}{\beta}_{n_1+1}|_\infty < \dfrac{2H_{n_1+1}}{|b_{\tau_{n_1+1}}^{(n_1+1)}|_\infty} & (j = 1, \ldots, \tau_{n_1+1}). \end{cases} \tag{43}$$

Aus (29) und (43) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} |c_{\lambda\mu}|_\infty \, |\overset{i}{\alpha}_{n_1+1}|_\infty^{\lambda} \, |\overset{j}{\beta}_{n_1+1}|_\infty^{\mu} &< C(n)(l+1)(m+1) \left(\frac{2h_{n_1+1}}{|a_{\sigma_{n_1+1}}^{(n_1+1)}|_\infty}\right)^l \left(\frac{2H_{n_1+1}}{|b_{\tau_{n_1+1}}^{(n_1+1)}|_\infty}\right)^m \\ &\leqq C(n) \left(\frac{4\bar{h}_{n_1+1}}{|a_{\sigma_{n_1+1}}^{(n_1+1)}|_\infty}\right)^l \left(\frac{4\bar{H}_{n_1+1}}{|b_{\tau_{n_1+1}}^{(n_1+1)}|_\infty}\right)^m. \end{aligned} \tag{44}$$

(42), (44) und (30) liefern endlich

$$|\overset{ij}{\Psi}|_\infty < \bar{h}_{n_1+1}^l \bar{H}_{n_1+1}^m \cdot 2^{4l} \cdot 2^{4m} \cdot e^{2\sqrt{2stq}\, n \log \bar{h}_n}. \tag{45}$$

Unter Benutzung von (41) für $(i, j) = (1, 1)$ und von (45) für $(i, j) \neq (1, 1)$ mit Berücksichtigung von $\sigma_{n_1+1} \leqq s$, $\tau_{n_1+1} \leqq t$ bekommen wir

$$(46) \qquad |\chi|_\infty < U,$$

wobei

$$(47) \qquad U = \bar{h}_{n_1+1}^{stl} \cdot \bar{H}_{n_1+1}^{stm} \cdot e^{2\sqrt{2s^2t^2q}\, n \log \bar{h}_n} \cdot \gamma_7^l \gamma_8^m \gamma_6^{n_1} (\underline{h_1} \cdot \underline{h_2} \cdots \underline{h_{n_1}})^{-c}$$

mit $\gamma_7 = 2^{4(st-1)} \gamma_4$, $\gamma_8 = 2^{4(st-1)} \gamma_5$, also $\gamma_6, \gamma_7, \gamma_8 > 1$, gesetzt wurde.

Da χ eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl war, gilt außerdem

$$(48) \qquad |\chi|_\infty \geqq 1.$$

(46) und (48) geben jetzt zusammen

$$(49) \qquad 1 \leqq |\chi|_\infty < U$$

mit U wie in (47), womit die beiderseitige Abschätzung von $|\chi|$ im Falle der Absolutbetragsbewertung geleistet ist.

Jetzt wird $|\chi|_p$ nach oben und nach unten abgeschätzt:

Da $\overset{ij}{\Psi}$ ganz algebraisch und $a_{\sigma_{n_1+1}}^{(n_1+1)}$, $b_{\tau_{n_1+1}}^{(n_1+1)}$ ganz rational sind, so gelten

$$(50) \qquad |\overset{ij}{\Psi}|_p \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, \sigma_{n_1+1};\ j = 1, \ldots, \tau_{n_1+1})$$

und

$$(51) \qquad |a_{\sigma_{n_1+1}}^{(n_1+1)}|_p \leqq 1, \quad |b_{\tau_{n_1+1}}^{(n_1+1)}|_p \leqq 1.$$

Unter Benutzung von (38) für $(i, j) = (1, 1)$ und (50) für sonstige (i, j) und mit Berücksichtigung von (36) und (51) erhalten wir

$$(52) \qquad |\chi|_p = \sum_{i,j=1,1}^{\sigma_{n_1+1},\, \tau_{n_1+1}} |\overset{ij}{\Psi}|_p \leqq |\overset{11}{\Psi}|_p \leqq |\Phi(z_{n_1+1})|_p$$
$$< e^{2\sqrt{2stq}\, n \log \bar{h}_n} \cdot \gamma_4^l \gamma_5^m \gamma_6^{n_1} (\underline{h_1} \cdot \underline{h_2} \cdots \underline{h_{n_1}})^{-c}.$$

Andererseits folgt aus $s \geqq 1$, $t \geqq 1$, $\gamma_7 = 2^{4(st-1)} \gamma_4 \geqq \gamma_4$, $\gamma_8 = 2^{4(st-1)} \gamma_5 \geqq \gamma_5$ und $\bar{h}_{n_1+1} \geqq 1$, $\bar{H}_{n_1+1} \geqq 1$

$$(53) \qquad e^{2\sqrt{2stq}\, n \log \bar{h}_n} \cdot \gamma_4^l \gamma_5^m \gamma_6^{n_1} (\underline{h_1} \cdot \underline{h_2} \cdots \underline{h_{n_1}})^{-c} \leqq U$$

(vgl. (47)). (52) und (53) liefern jetzt zusammen

$$(54) \qquad |\chi|_p < U.$$

Da χ eine ganze rationale Zahl war, gilt außerdem nach Hilfssatz 7 von § 2 als untere Abschätzung für $|\chi|_p$

$$(55) \qquad |\chi|_p \geqq \frac{1}{|\chi|_\infty} > \frac{1}{V} \text{ mit } V = \bar{h}_{n_1+1}^{stl} \bar{H}_{n_1+1}^{stm} \cdot 2^{4stl \,.\, 4stm} \cdot e^{2\sqrt{2s^2t^2q}\, n \log \bar{h}_n}.$$

(Die letzte Ungleichung folgt aus der Definition von χ, aus (45) und $\sigma_{n_1+1} \leqq s$, $\tau_{x_1+1} \leqq t$).

(54) und (55) werden endlich zusammengezogen zu

$$(56) \qquad \frac{1}{V} < |\chi|_p < U.$$

Damit ist die beiderseitige Abschätzung von $|\chi|$ auch im p-adischen Gebiet geleistet. Die Vereinigung von (49) und (56) liefert uns jetzt

$$(57) \qquad \frac{1}{V} < |\chi| < U,$$

woraus folgt, daß

$$(58) \qquad UV = \bar{h}_{n_1+1}^{2stl} \bar{H}_{n_1+1}^{2stm} \cdot e^{4\sqrt{2s^2t^2q}\, n \log \bar{h}_n} \cdot \gamma_9^l \gamma_{10}^m \gamma_6^{n_1} (h_1 h_2 \cdots h_{n_1})^{-c} > 1$$

sein muß, wobei $\gamma_9 = 2^{4st} \gamma_7$, $\gamma_{10} = 2^{4st} \gamma_8$ gesetzt wurde.

Wir zeigen jetzt, daß (58) einen Widerspruch enthält, falls n genügend groß gewählt wird. Es wird jedenfalls, wie bisher, immer $n > N_2$ vorausgesetzt. Nach (23), (25) und $n_1 \geqq n$ gilt

$$(59)\qquad \begin{aligned} \bar{h}_{n_1+1}^{2stl}\,\bar{H}_{n_1+1}^{2stm} &= e^{2st(l\log\bar{h}_{n_1+1}+m\log\bar{H}_{n_1+1})} \\ &< e^{2st\left(\sqrt{2stq}\,n\log\bar{h}_{n_1+1}+\sqrt{\frac{2st}{q}}\cdot q(n_1+1)\log\bar{h}_{n_1+1}\right)} \\ &= e^{2\sqrt{2s^2t^2q}(n+n_1+1)\log\bar{h}_{n_1+1}} < e^{4\sqrt{2s^2t^2q}(n_1+1)\log\bar{h}_{n_1+1}}. \end{aligned}$$

Aus $n_1 \geqq n$ folgt weiter

$$(60)\qquad e^{4\sqrt{2s^2t^2q}\,n\log h_n} < e^{4\sqrt{2s^2t^2q}(n_1+1)\log\bar{h}_{n_1+1}}.$$

Es gilt außerdem

$$(61)\qquad \begin{cases} \gamma_9^l = \gamma_9^{[\sqrt{2stq}\,n]} \leqq \gamma_9^{\sqrt{2stq}\,n_1}, \\ \gamma_{10}^m = \gamma_{10}^{\left[\sqrt{\frac{2st}{q}}\right]} \leqq \gamma_{10}^{\sqrt{\frac{2st}{q}}}, \end{cases}$$

da $\gamma_9, \gamma_{10} > 1$ sind. Endlich gilt für den Faktor $(\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2 \cdots \underline{h}_{n_1})^{-c}$ von UV nach (7)

$$(62)\qquad \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n_1}\log\underline{h}_\nu}{n_1\log\bar{h}_{n_1+1}} > A-\varepsilon > 0 \text{ für } n_1 > N_3, \text{ mit geeignetem } N_3 \geqq 0,$$

woraus

$$(63)\qquad (\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2 \cdots \underline{h}_{n_1})^{-c} = e^{-c\sum\limits_{\nu=1}^{n_1}\log h_\nu} < e^{-c(A-\varepsilon)\,n_1\log\bar{h}_{n_1+1}} \text{ für } n_1 > N_3 \text{ folgt.}$$

Jetzt wählen wir $n > \operatorname{Max}(N_2, N_3)$. Dann werden für $n_1 \geqq n$ sowohl (60) und (61) als auch (63) richtig. Also ergibt sich für diese n aus (59), (60), (61) und (63)

$$(64)\qquad UV < e^{8\sqrt{2s^3t^3q}(n_1+1)\log\bar{h}_{n_1+1}-c(A-\varepsilon)n_1\log\bar{h}_{n_1+1}+O(n_1)}.$$

Aus (58) und (64) folgern wir endlich, daß

$$(65)\qquad \left(8\sqrt{2s^3t^3q}-c(A-\varepsilon)\right)(n_1+1)\log\bar{h}_{n_1+1}+O(\log\bar{h}_{n_1+1})+O(n_1) > 0$$

sein muß, wobei $n_1 \geqq n > \operatorname{Max}(N_2, N_3)$ ist. Da $h_{n_1} \to +\infty$ nach (4) und folglich $\log h_{n_1} \to +\infty$ für $n_1 \to \infty$ gilt, ist in (65) für $n_1 \to \infty$ das erste Glied ausschlaggebend, dessen Koeffizient nach der Wahl von q in (21) negativ ist. Hiernach wird für $n_1 > N_4$ die linke Seite von (65) negativ, wobei $N_4 \geqq 0$ eine genügend große Zahl darstellt.

Zum Schluß wählen wir ein $n > \operatorname{Max}(N_2, N_3, N_4)$*). Da $n_1 \geqq n$ ist, so wird die linke Seite von (65) nach dem eben Gesagten negativ, was mit der rechten Seite einen Widerspruch liefert.

Der Widerspruch löst sich nur, wenn wir die Voraussetzung, daß $\Phi(z_{n_1+1}) \neq 0$ ist, für $\Phi(z_1) = \Phi(z_2) = \cdots = \Phi(z_{n_1}) = 0$ mit $n_1 \geqq n > \operatorname{Max}(N_2, N_3, N_4)$, fallen lassen. Also gilt $\Phi(z_{n_1+1}) = 0$, wenn $\Phi(z_\nu) = 0$ ist $(\nu = 1, \ldots, n_1)$, wobei $n_1 \geqq n$, n fest und $> \operatorname{Max}(N_2, N_3, N_4)$ ist. Damit ist der Satz nach dem bereits gemachten Hinweis auf vollständige Induktion bewiesen.

---

*) Natürlich werden die Werte von l, m und $c_{\lambda\mu}$ und folglich das Polynom $\Phi(z)$ auf diesen Wert von n abgestimmt.

Beweis der Notwendigkeit (Umkehrung des Satzes I).

Es sei $w = f(z)$ eine algebraische Funktion i. a. S. (d. h. sie genüge einer Gleichung $\sum_{\iota,\varkappa=0,0}^{i,k} c_{\iota\varkappa} z^\iota w^\varkappa = 0$ mit ganzen rationalen $c_{\iota\varkappa}$) und $\{z_n\}$ eine Folge von algebraischen Zahlen von beschränktem Grad $\leqq s$, wobei s als ganz rational gewählt werden darf. Danach genügt $f(z_n)$ einer Gleichung

$$\sum_{\iota,\varkappa=0,0}^{i,k} c_{\iota\varkappa} z_n^\iota w^\varkappa = 0. \tag{66}$$

Es sei ferner $z_n^{(1)} = z_n, z_n^{(2)}, \ldots, z_n^{(\sigma_n)}$ mit $\sigma_n \leqq s$ ein vollständiges Konjugiertensystem von z_n in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen P,

$$\sum_{\nu=0}^{\sigma_n} a_\nu^{(n)} z_n^\nu = 0 \tag{67}$$

die Minimalgleichung und h_n die Höhe von z_n. Hiernach werden $z_n^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma_n)$ durch Multiplikation mit $a_{\sigma_n}^{(n)}$ zu ganzen algebraischen Zahlen und es gilt

$$|a_{\sigma_n}^{(n)}|_\infty \leqq h_n. \tag{68}$$

Daraus folgt, daß $f(z_n)$ der Gleichung

$$\prod_{j=1}^{\sigma_n} \left((a_{\sigma_n}^{(n)})^i \sum_{\iota,\varkappa=0,0}^{i,k} c_{\iota\varkappa} (z_n^{(i)})^\iota w^\varkappa \right) = 0 \tag{69}$$

genügt, welche lauter ganze rationale Koeffizienten hat. Das Minimalpolynom von $f(z_n)$ ist also ein Teiler der linken Seite von (69). Der Grad τ_n von $f(z_n)$ ist also $\leqq k\sigma_n \leqq ks$, d. h. $\{f(z_n)\}$ ist von beschränktem Grad, womit die Bedingung a) der Voraussetzung des Satzes I mit $t = ks$ erfüllt ist. Die Höhe H_n von $f(z_n)$ ist definitionsgemäß das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten dieses Minimalpolynoms. Um H_n abzuschätzen, werden wir zunächst das Maximum H_n' der Absolutbeträge der Koeffizienten von (69) wie folgt abschätzen. Es sei $\bar{c} = \operatorname{Max}_{\iota,\varkappa} (|c_{\iota\varkappa}|_\infty)$. Nach Hilfssatz 1 aus § 2 gilt ferner

$$|z^{(j)}|_\infty < \frac{h_n}{|a_{\sigma_n}^{(n)}|_\infty} + 1 \leqq \frac{2h_n}{|a_{\sigma_n}^{(n)}|_\infty} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma_n). \tag{70}$$

Mit Hilfe von (68) und (70) führen wir die folgende Majorantenrechnung durch:

$$\begin{aligned}(a_{\sigma_n}^{(n)})^i \sum_{\iota,\varkappa=0,0}^{i,k} c_{\iota\varkappa} (z_n^{(j)})^\iota w^\varkappa &\ll |a_{\sigma_n}^{(n)}|_\infty^i \sum_{\iota,\varkappa=0,0}^{i,k} \bar{c} \left(\frac{2h_n}{|a_{\sigma_n}^{(n)}|_\infty} \right)^\iota w^\varkappa \\ &= (i+1)\, 2^i \bar{c} h_n^i \sum_{\varkappa=0}^{k} w^\varkappa \ll 4^i \cdot \bar{c} \cdot h_n^i \sum_{\varkappa=0}^{k} w^\varkappa\end{aligned}$$

und folglich

$$\prod_{j=1}^{\sigma_n} \left((a_{\sigma_n}^{(n)})^i \sum_{\iota,\varkappa=0,0}^{i,k} c_{\iota\varkappa} (z_n^{(j)})^\iota w^\varkappa \right) \ll (4^i \cdot \bar{c} \cdot h_n^i)^{\sigma_n} \left(\sum_{\varkappa=0}^{k} w^\varkappa \right)^{\sigma_n} \ll \bar{c}^s \cdot 4^{is} \cdot h_n^{is} \left(\sum_{\varkappa=0}^{k} w^\varkappa \right)^s, \tag{71}$$

weil $\sigma_n \leqq s$ ist. Da alle Koeffizienten in $\left(\sum_{\varkappa=0}^{k} w^\varkappa \right)^s$ kleiner als $(k+1)^s$ sind, so gilt für H_n' die Abschätzung

$$H_n' < \bar{c}^s 4^{is} (k+1)^s h_n^{is}. \tag{72}$$

Hilfssatz 2 aus § 2 gibt, unter Benutzung von (72), die gesuchte Abschätzung

$$H_n < (k\sigma_n)!\, H_n' < (ks)! \cdot \bar{c}^s \cdot 4^{is} \cdot (k+1)^s \cdot h_n^{is}, \tag{73}$$

d. h.

$$H_n < c_1 h_n^{c_2} \tag{74}$$

wobei c_1, c_2 von n unabhängig sind. Aus (74) folgt sofort das Erfülltsein der Bedingung b) der Voraussetzung.

Bemerkung. Im Verlaufe des Beweises der Hinlänglichkeit von Satz I ergibt sich eine obere Schranke für den (wirklichen) Grad k der (algebraischen) Funktion $w = f(z)$.

Es gilt nämlich

$$k \leqq m = \left[\sqrt{\frac{2st}{q}}\right] = \operatorname{Max}\left(1, \frac{16\,s^2t^2}{c(A-2\varepsilon)}\right), \tag{75}$$

wenn wir $q = \operatorname{Min}\left(2st, \frac{c^2(A-2\varepsilon)^2}{128s^3t^3}\right)$ wählen, was den Bedingungen (21) genügt. Da ε beliebig klein gewählt werden darf, bekommen wir für die gesuchte Schranke

$$k \leqq \operatorname{Max}\left(1, \frac{16s^2t^2}{cA}\right). \tag{76}$$

Daß diese Schranke allerdings recht grob ist, kann man an dem Beispiel $z_n = \left(\frac{1}{n}\right)$, also $A = 1 - \varepsilon_1 (\varepsilon_1 > 0$, beliebig klein), $c = 1$, $s = 1$ sehen. $f\left(\frac{1}{n}\right)$ sei für $n = 1, 2, \ldots$ rational, also $t = 1$ und genüge außerdem der Bedingung b) des Satzes I. Nach diesem Satz ist $f(z)$ eine algebraische Funktion. Es ist aber nach dem Hilbertschen Irreduzibilitätssatz ersichtlich, daß $f(z)$ eine rationale Funktion von z sein muß. Also muß $k = 1$ sein, während aus (76) sich $k \leqq 16$ ergibt.

§ 4. Ergänzende Bemerkungen.

Auf ähnlichem Wege wie zum Beweis von Satz I lassen sich einige weitere Resultate gewinnen, welche Satz I in verschiedenen Richtungen verallgemeinern. Wir stellen diese nachfolgend als Sätze zusammen, gehen auf die Beweise jedoch nicht ein, da sie keine neuen Gedanken enthalten.

Dem nächsten Satz legen wir eine Interpolationsstellenfolge $\{z_n\}$ zugrunde, die folgende Eigenschaften besitzt:

1) $\{z_n\}$ ist vergleichbar;
2) Die zugeordnete Höhenfolge $\{h_n\}$ divergiert gegen $+\infty$;
3) $\{\log h_n\}$ ist ausgeglichen.

Eine solche Folge $\{z_n\}$ nennen wir eine *verallgemeinerte zulässige Folge.* Der Unterschied gegenüber den zulässigen Folgen von § 1 besteht darin, daß die Bedingung über die Beschränktheit der Grade von $\{z_n\}$ durch die schwächere Bedingung 2) ersetzt wurde.

Satz II. *Es sei $f(z)$ eine im Punkte $z = \zeta$ reguläre analytische Funktion; ζ werde durch eine verallgemeinerte zulässige Folge $\{z_n\}$ approximiert. σ_n und τ_n seien die jeweiligen Grade und h_n und H_n die jeweiligen Höhen von z_n und $f(z_n)$. Wenn dann entweder*

$\mathrm{a}_1)$ $\sigma_n \tau_n = o(n^{\vec{\gamma}})$,

$\mathrm{b}_1)$ $\log H_n = O(n^{\vec{J}-3\vec{\gamma}} \log h_n)$ *für* $\vec{0} \leqq \vec{\gamma} < \frac{1}{3}\vec{J}$,

oder

$\mathrm{a}_2)$ $\sigma_n \tau_n = o(n^{\vec{\gamma}})$,

$\mathrm{b}_2)$ $\log H_n = O(n^{\vec{J}-3\vec{\gamma}} \log h_n)$ *für* $\vec{0} < \vec{\gamma} \leqq \frac{1}{3}\vec{J}$

gelten, so ist $f(z)$ eine algebraische Funktion i. a. S.

Satz II'. *In den folgenden beiden Spezialfällen sind die obigen Bedingungen* a) *und* b) *auch notwendig für die Algebraizität i. a. S. von* $f(z)$:

1) σ_n *beschränkt, d. h.* $\sigma_n \leqq s$, $s > 0$, *fest.*

2) $\sigma_n = O(n^{\vec{\delta}})$ *mit* $\vec{0} < \vec{\delta} < \frac{1}{7}\vec{J}$ *und* $\log \sigma_n = O(\log h_n)$.

Der Spezialfall der Sätze II und II' zusammen für beschränktes σ_n und $\vec{\gamma} = \vec{0}$ enthält Satz I und damit auch den Schneiderschen Satz I. Für beschränktes σ_n und $\vec{\gamma} = \frac{1}{3}\vec{J}$ enthalten die Sätze II und II' zusammen den Schneiderschen Satz III*).

Der folgende Satz III stellt ein hinreichendes Kriterium für die algebraische Abhängigkeit i. a. S. von N ($N > 1$) vorgegebenen analytischen Funktionen auf Grund ihrer Wertevorräte dar. Die algebraische Abhängigkeit i. a. S. wird wie folgt definiert:

Definition. Es seien N Funktionen $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_N(z)$ vorgegeben. Wir nennen diese Funktionen *algebraisch abhängig i. a. S.*, wenn zwischen ihnen eine Relation von der Form $\sum\limits_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N = 0, 0, \ldots, 0}^{m_1, m_2, \ldots, m_N} c_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N} (f_1(z))^{\mu_1} (f_2(z))^{\mu_2} \cdots (f_N(z))^{\mu_N} = 0$ mit algebraischen (und folglich auch eine solche mit ganzen rationalen) Koeffizienten $c_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N}$ besteht.

Dem folgenden Satz legen wir als Interpolationsstellenfolge eine wiederholungsfreie konvergente Folge $\{z_n\}$ (der Limes von z_n sei wiederum mit ζ bezeichnet) zugrunde mit der Eigenschaft, daß die zugeordnete Folge $\{\log p_n\}$ ausgeglichen ist, wobei $p_n = \frac{1}{|z_n - \zeta|}$ gesetzt wurde. Es sei darauf hingewiesen, daß hier die Algebraizität der Glieder der Folge $\{z_n\}$ nicht vorausgesetzt wurde.

Satz III. *Es sei* $\{z_n\}$ *eine Folge der eben geschilderten Art. Ferner seien* $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_N(z)$ *analytische Funktionen, welche für* $z = \zeta$ *regulär sind.*

Wenn $f_k(z_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, N;\ n = 1, 2, \ldots)$ *lauter algebraische Zahlen sind, für deren jeweilige Grade* $\sigma_{k,n}$ *und Höhen* $K_n^{(k)}$ *entweder*

$$\mathrm{a}_1)\quad \prod_{k=1}^{N} \sigma_{k,n} = O(n^{\vec{\gamma}}),\ \vec{\gamma} \geqq \vec{0},$$

$$\mathrm{b}_1)\quad \log H_n^{(k)} = \begin{cases} o(n^{\vec{\delta}_k} \log p_n),\ \vec{\delta}_k > \vec{0} \text{ für } k = j \\ o(n^{\vec{\delta}_k} \log p_n),\ \vec{\delta}_k \geqq \vec{0} \text{ für } k \neq j \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N;\ 1 \leqq j \leqq N)$$

oder

$$\mathrm{a}_2)\quad \prod_{k=1}^{N} \sigma_{k,n} = O(n^{\vec{\gamma}}),\ \vec{\gamma} > \vec{0},$$

$$\mathrm{b}_2)\quad \log H_n^{(k)} = o(n^{\vec{\delta}_k} \log p_n),\ \vec{\delta}_k \geqq \vec{0}\ (k = 1, 2, \ldots, N)$$

gelten, wobei in beiden Fällen $(N+1)\vec{\gamma} + \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{\delta}_k = (N-1)\vec{J}$ *und* $\vec{\delta}_k \leqq \dfrac{\vec{\gamma} + \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{\delta}_k + \vec{J}}{N}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ *sind, so sind* $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_N(z)$ *algebraisch abhängig i. a. S.*

Zusatz. *Satz* III *bleibt auch dann richtig, wenn eine oder mehrere der Funktionen* $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_N(z)$ *an der Stelle* $z = \zeta$ *eine algebraische Singularität aufweisen.*

---

*) Nach einer Mitteilung von Herrn Schneider ist der Exponent $\frac{1}{2}$ in der Bedingung $s_\nu = O(\nu)^{\frac{1}{2}}$ beim Wortlaut seines Satzes III (*Schneider* [11], S. 69) auf $\frac{1}{3}$ zu berichtigen.

Bemerkung. Der Satz III enthält den Hinlänglichkeitsteil des Schneiderschen Satzes I. Denn dieser ist in der Spezialisierung des Satzes I auf das komplexe Gebiet und $\zeta = 0$ enthalten. Dieser letzte ist wiederum in einer Spezialisierung des Satzes III auf das komplexe Gebiet und $\zeta = 0$ enthalten und zwar mit $N = 2$, $f_1(z) = z$, $f_2(z) = f(z)$, $\vec{\gamma} = \vec{0}$, $\vec{\delta}_1 = \vec{0}$, $\vec{\delta}_2 = \vec{J}$.

Den Beweis des Satzes III werden wir aus demselben Grunde unterdrücken wie bei den Sätzen II und II'.

TEIL II.

Anwendung des Satzes I auf den Beweis des Mahler-Veldkampschen Satzes.

§ 1. Einige einfache Höhenabschätzungen.

Lemma 1. *Es seien a, b ganze rationale Zahlen, β eine irrationale algebraische Zahl vom Grade $s (s \geqq 2)$ und der Höhe h_β.*

Dann ist auch $\omega = a + b\beta$ algebraisch und höchstens vom Grade s und es gilt für seine Höhe $h_{a+b\beta}$ die Abschätzung

$$h_{a+b\beta} < 2^{2s}(\mathrm{Max}\,(|\,a\,|_\infty, |\,b\,|_\infty))^s \cdot h_\beta.$$

Beweis. Es sei $a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_0 = 0$ die Minimalgleichung für β, also $\mathrm{Max}\,(|a_s|_\infty, |\,a_{s-1}\,|_\infty, \ldots, |\,a_0\,|_\infty) = h_\beta$.

Wenn $b \neq 0$ ist, genügt ω der Gleichung $a_s\left(\frac{w-a}{b}\right)^s + a_{s-1}\left(\frac{w-a}{b}\right)^{s-1} + \cdots + a_0 = 0$, d. h. $a_s(w-a)^s + a_{s-1}b(w-a)^{s-1} + \cdots + a_0 b^s = 0$ mit ganzen rationalen Koeffizienten. Diese letzte Gleichung ist, abgesehen von einem eventuellen konstanten Faktor, unzerlegbar. Also ist ω für $b \neq 0$ von s-tem Grade und die Höhe von ω wird unten durch eine kleine Majorantenrechnung abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
&a_s(w-a)^s + a_{s-1}b(w-a)^{s-1} + \cdots + a_0 b^s \\
&\ll |\,a_s\,|_\infty (w + |\,a\,|_\infty)^s + |\,a_{s-1}\,|_\infty |\,b\,|_\infty (w + |\,a\,|_\infty)^{s-1} + \cdots + |\,a_0\,|_\infty\,|\,b\,|_\infty^s \\
&\ll h_\beta \{|\,a\,|_\infty^s (w+1)^s + |\,a\,|_\infty^{s-1}\,|\,b\,|_\infty (w+1)^{s-1} + \cdots + |\,b\,|_\infty^s\} \\
&\ll h_\beta \cdot (\mathrm{Max}\,(|\,a\,|_\infty, |\,b\,|_\infty))^s \{(s+1)(w+1)^s\}.
\end{aligned}$$

Da der größte Koeffizient in $(w+1)^s$ kleiner als 2^s ist, folgt hieraus $h_{a+b\beta} < h_\beta \cdot (\mathrm{Max}(|\,a\,|_\infty, |\,b\,|_\infty))^s (s+1)\,2^s$. Mit Berücksichtigung von $s + 1 < 2^s$ für $s \geqq 2$ gewinnen wir endlich $h_{a+b\beta} < 2^{2s}(\mathrm{Max}(|\,a\,|_\infty, |\,b\,|_\infty))^s \cdot h_\beta$, wenn $b \neq 0$. Für $b = 0$ ist das Lemma trivialerweise richtig.

Lemma 2. *Es sei α eine algebraische Zahl vom Grade s und von der Höhe h_α, β eine vom Grade t und von der Höhe h_β. Dann ist $\alpha\beta$ eine algebraische Zahl höchstens vom Grade st und von der Höhe $h_{\alpha\beta}$ mit*

$$h_{\alpha\beta} < (st)!\,2^{3st}(h_\alpha h_\beta)^{st}.$$

Beweis. Es seien

$$\begin{aligned}
a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_0 &= 0, \\
b_t x^t + b_{t-1}x^{t-1} + \cdots + b_0 &= 0
\end{aligned}$$

die jeweiligen Minimalgleichungen für α und β. Es sei α_i $(i = 1, \ldots, s)$ das Konjugiertensystem von α, β_k $(k = 1, \ldots, t)$ dasjenige von β. Die Zahlen $a_s\alpha_i (i = 1, \ldots, s)$, $b_t\beta_k$

$(k = 1, \ldots, t)$ sind ganz algebraisch, und die Gleichung $\prod_{i,k=1,1}^{s,t} a_s b_t (x - \alpha_i \beta_k) = 0$, welcher $\alpha\beta$ genügt, hat ganze rationale Koeffizienten. Es gilt folgende Majorantenrechnung:

$$\prod_{i,k=1,1}^{s,t} a_s b_t (x - \alpha_i \beta_k) \ll |a_s b_t|_\infty^{st} \prod_{i,k=1,1}^{s,t} (x + |\alpha_i \beta_k|_\infty)$$

$$\ll |a_s b_t|_\infty^{st} \left(\frac{4 h_\alpha h_\beta}{|a_s|_\infty |b_t|_\infty}\right)^{st} (x+1)^{st} = 2^{2st} h_\alpha^{st} h_\beta^{st} (x+1)^{st},$$

da $|a_s|_\infty \leqq h_\alpha$, $|b_t|_\infty \leqq h_\beta$; $|\alpha_i|_\infty < \frac{2h_\alpha}{|a_s|_\infty}$ $(i = 1, \ldots, s)$, $|\beta_k|_\infty < \frac{2h_\beta}{|b_t|_\infty}$ $(k = 1, \ldots, t)$ gilt. Die letzte Beziehung gibt $2^{st} \cdot 2^{2st} h_\alpha^{st} h_\beta^{st} = 2^{3st} (h_\alpha h_\beta)^{st}$ als eine obere Schranke der Absolutbeträge der Koeffizienten der Gleichung $\prod_{i,k=1,1}^{s,t} a_s b_t (x - \alpha_i \beta_k) = 0$. Die Höhe von $\alpha\beta$ wird aber gegeben durch das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten eines irreduziblen Faktors der linken Seite, welche $\alpha\beta$ als Wurzel enthält. Nach Hilfssatz 2 von Teil I gilt also $h_{\alpha\beta} < (st)!\, 2^{3st} (h_\alpha h_\beta)^{st}$.

Lemma 3. *Es sei α eine algebraische Zahl vom Grade s und von der Höhe h_α, k eine ganze rationale Zahl. Dann ist $\omega = \alpha^k$ eine algebraische Zahl höchstens vom Grade s und von der Höhe*

$$h_{\alpha^k} \leqq s!\, 2^{|k|_\infty s} \cdot h_\alpha^{|k|_\infty}.$$

Beweis. Es sei $P(x) \equiv a_s x^s + \cdots + a_0 = 0$ die Minimalgleichung von α. Der Fall $k = 0$ ist trivial.

Da der Grad und die Höhe von α^k dieselben sind wie diejenigen von $\alpha^{-k} = \frac{1}{\alpha^k}$, genügt es nur den Fall zu betrachten, wo $k > 0$ ist. $\omega = \alpha^k$ genügt offenbar der Gleichung $P\left(w^{\frac{1}{k}}\right) P\left(\varepsilon w^{\frac{1}{k}}\right) \cdots P\left(\varepsilon^{k-1} w^{\frac{1}{k}}\right) = 0$, wobei ε eine primitive k-te Einheitswurzel ist. Die linke Seite ist ein Polynom in w von s-tem Grade. Wir schätzen die Absolutbeträge der Koeffizienten dieser Gleichung wie folgt ab: Es gilt zunächst

$$P\left(\varepsilon^j w^{\frac{1}{k}}\right) = a_s \varepsilon^{js} w^{\frac{s}{k}} + \cdots + a_0 \ll h_\alpha \left(1 + w^{\frac{1}{k}}\right)^s \qquad (j = 0, \ldots, k-1).$$

Hieraus folgt

$$P\left(w^{\frac{1}{k}}\right) P\left(\varepsilon w^{\frac{1}{k}}\right) \cdots P\left(\varepsilon^{k-1} w^{\frac{1}{k}}\right) \ll \left\{h_\alpha \left(1 + w^{\frac{1}{k}}\right)^s\right\}^k,$$

woraus wir unter Anwendung des Hilfssatzes 2 von Teil I entnehmen, daß $h_{\alpha^k} < s!\, 2^{ks} h_\alpha^k$ ist.

Lemma 4. *Es sei ω eine ganze algebraische Zahl, N eine ganze rationale Zahl, welche $\geqq 1$ ist. Dann besteht zwischen den jeweiligen Höhen h_ω und $h_{N\omega}$ von ω und $N\omega$ die Ungleichung*

$$h_{N\omega} \geqq N h_\omega.$$

Beweis. Es sei $w^s + c_{s-1} w^{s-1} + \cdots + c_0 = 0$ die Minimalgleichung von ω. Dann gilt $h_\omega = \mathrm{Max}(1, |c_{s-1}|_\infty, \ldots, |c_0|_\infty)$. Die Minimalgleichung von $N\omega = \Omega$ wird danach $W^s + c_{s-1} N W^{s-1} + \cdots + c_0 N^s = 0$. Also

$$h_{N\omega} = \mathrm{Max}(1, |c_{s-1}|_\infty N, \ldots, |c_0|_\infty N^s) \geqq N\, \mathrm{Max}(1, |c_{s-1}|_\infty, \ldots, |c_0|_\infty) = N h_\omega.$$

§ 2. Beweis des Satzes von Mahler-Veldkamp*).

Dieser Satz lautet in der Fassung bei Veldkamp:

Es sei α eine von 0 und 1 verschiedene algebraische Zahl, die der Ungleichung $|\alpha - 1|_p \leqq p^{-1}$ genügt und β eine irrationale ganze algebraische Zahl; dann ist die Zahl α^β im p-adischen Gebiet transzendent.

Es wird nun behauptet: Die Richtigkeit dieses Satzes folgt durch Anwendung des Satzes I von Teil I auf den Fall, in dem die Interpolationsstellenfolge wie folgt definiert ist:

Wir betrachten zunächst die Doppelfolge $\lambda + \mu\beta$, wobei $\lambda = 0, 1, \ldots; \mu = 0, 1, \ldots$ sind. Von dieser Doppelfolge schließen wir das Glied mit $\lambda = \mu = 0$ aus und ordnen die anderen Glieder in einer einfachen Folge an, und zwar nach folgendem Prinzip:

$\lambda + \mu\beta$ kommt vor $\lambda' + \mu'\beta$, wenn $\lambda + \mu < \lambda' + \mu'$ oder $\lambda + \mu = \lambda' + \mu'$, aber $\lambda < \lambda'$ ist. Auf diese Weise entspricht jeder natürlichen Zahl n eindeutig eine Zahl $\lambda_n + \mu_n\beta$ als n-tes Glied der einfachen Folge. Wegen späteren Gebrauchs schätzen wir obere Grenzen für λ_n, μ_n ab.

Da die Lösungsanzahl von $\lambda + \mu = \nu$ in λ, μ ($\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$; λ, μ ganz mit vorgegebenem ganzem positivem ν) gleich $\nu + 1$ ist, ist die Anzahl der Glieder mit $\lambda + \mu \leqq m - 1$ gleich $2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2} - 1$. Hieraus folgt, daß $n > \frac{m(m+1)}{2} - 1$ sein muß, wenn für das n-te Glied $\lambda_n + \mu_n = m$ ist. Es muß danach $m < 2\sqrt{n}$ sein. Denn aus $m \geqq 2\sqrt{n}$ würde folgen $n > \frac{2\sqrt{n}(2\sqrt{n}+1)}{2} - 1 = 2n + \sqrt{n} - 1 > n$, also ein Widerspruch. Aus $m < 2\sqrt{n}$ folgt endlich

$$\lambda_n < 2\sqrt{n}, \quad \mu_n < 2\sqrt{n}. \tag{1}$$

Die Interpolationsstellenfolge, von der oben die Rede war, wird jetzt definiert durch

$$z_n = (\lambda_n + \mu_n\beta)\, p^{\left[\frac{\log_p n}{2}\right]} = a_n + b_n\beta \text{ mit } \begin{cases} a_n = \lambda_n p^{\left[\frac{\log_p n}{2}\right]} \\ b_n = \mu_n p^{\left[\frac{\log_p n}{2}\right]}, \end{cases} \tag{2}$$

wobei unter $\log_p n$ der Logarithmus von n zur Basis p verstanden wird. Aus (1) folgt nun

$$a_n < 2n, \quad b_n < 2n. \tag{3}$$

Wir zeigen jetzt, daß diese Stellenfolge zulässig ist (vgl. Teil I, § 1). Zunächst ist sie vergleichbar von beschränktem Grad:

a) $\{z_n\}$ ist ohne Wiederholung.

Aus $z_n = z_{n'}$ mit $n' \neq n$, etwa $n' > n$, folgt im Hinblick auf die Irrationalität von β, daß $a_n = a_{n'}$, $b_n = b_{n'}$, d. h.

$$\begin{cases} \lambda_n p^{\left[\frac{\log_p n}{2}\right]} = \lambda_{n'} p^{\left[\frac{\log_p n'}{2}\right]} \\ \mu_n p^{\left[\frac{\log_p n}{2}\right]} = \mu_{n'} p^{\left[\frac{\log_p n'}{2}\right]} \end{cases} \tag{4}$$

ist.

Da mit $n' > n$ auch $p^{\left[\frac{\log_p n'}{2}\right]} \geqq p^{\left[\frac{\log_p n}{2}\right]}$ wird, folgt daraus, daß entweder $\lambda_n > \lambda_{n'}$, $\mu_n > \mu_{n'}$ oder $\lambda_n = \lambda_{n'}$, $\mu_n = \mu_{n'}$ ist. Der erste Fall ist unmöglich, weil dann

*) Vgl. *Mahler* [7] und *Veldkamp* [15].

$\lambda_n + \mu_n > \lambda_{n'} + \mu_{n'}$ sein würde, woraus $n > n'$ folgte. Der zweite Fall ist ebensowenig möglich, weil daraus $n = n'$ folgte. In allen Fällen würden wir zu einem Widerspruch geführt. Also folgt aus $z_n = z_{n'}$ notwendigerweise $n = n'$, d. h. die Folge $\{z_n\}$ ist ohne Wiederholung

b) Es ist nach Lemma 1 von Teil II, § 1 klar, daß $\{z_n\}$ aus lauter algebraischen Zahlen höchstens s-ten Grades besteht, wobei s der Grad von β ist. Hieraus folgt insbesondere, wie in Teil I, § 1 B, daß $h_n \to +\infty$ strebt mit $n \to \infty$.

c) Es gilt die Bedingung $|z_n - \zeta|_p \leqq \frac{1}{h_n^c}$ für genügend großes n mit $\zeta = 0$. Zunächst ist

$$|z_n|_p = |\lambda_n + \mu_n \beta|_p \, p^{-\left[\frac{\log_p n}{2}\right]}; \tag{5}$$

daraus wird unter Berücksichtigung von

$$|\lambda_n + \mu_n \beta|_p \leqq \operatorname{Max}(|\lambda_n|_p, |\mu_n|_p |\beta|_p) \leqq 1 \tag{6}$$

(weil λ_n, μ_n ganze rationale Zahlen sind und β eine ganze algebraische Zahl ist) und

$$\left[\frac{\log_p n}{2}\right] > \frac{\log_p n}{2} - 1$$

$$|z_n|_p < p^{-\frac{\log_p n}{2} + 1} = \frac{p}{\sqrt{n}}. \tag{7}$$

(Nebenbei bemerkt folgt hieraus $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$, wobei das Zeichen lim im p-adischen Sinne zu verstehen ist.) Andererseits gilt nach Lemma 1 von Teil II, § 1 für die Höhe h_n von $z_n = a_n + b_n \beta$ unter Benutzung von (1)

$$h_n < 2^{2s} (2n)^s h_\beta = 2^{3s} h_\beta n^s. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt nun $|z_n|_p < \dfrac{2^{\frac{3}{2}} p \, h_\beta^{\frac{1}{2s}}}{h_n^{\frac{1}{2s}}}$, d. h.

$$|z_n|_p \leqq \frac{1}{h_n^c} \tag{9}$$

für genügend großes n und mit $0 < c < \frac{1}{2s}$; denn nach b) gilt $h_n \to +\infty$ für $n \to \infty$.

Damit ist dargetan, daß $\{z_n\}$ vergleichbar von beschränktem Grad ist. Um ihre Zulässigkeit zu zeigen, müssen wir noch die Ausgeglichenheit der Folge $\{\log h_n\}$ beweisen, was folgendermaßen geschieht:

Wir bemerken erstens: Laut b) gilt $\log h_n \to +\infty$ mit $n \to \infty$.

Zweitens ist $\lambda_n + \mu_n \beta$ ganz algebraisch, da λ_n, μ_n, β ganze algebraische Zahlen sind. Es gilt nach Lemma 4 von Teil II, § 1 mit $\omega = \lambda_n + \mu_n \beta$, $N = p^{\left[\frac{\log_p n}{2}\right]}$

$$h_n \geqq p^{\left[\frac{\log_p n}{2}\right]} \cdot h_{\lambda_n + \mu_n \beta} \geqq p^{\left[\frac{\log_p n}{2}\right]} > \frac{1}{p} \sqrt{n}. \tag{10}$$

Die Verbindung von (8) und (10) liefert

$$\frac{1}{p}\sqrt{n} < h_n < 2^{3s} h_\beta n^s, \tag{11}$$

d. h. $\frac{1}{2}\log n - \log p < \log h_n < s \log n + \log 2^{3s} h_\beta$.

Daraus folgt, daß das Verhältnis $\frac{\log h_n}{\log n}$ für $n > p^2$ zwischen zwei positiven Grenzen bleibt, etwa

$$l_1 \log n < \log h_n < l_2 \log n \text{ mit } 0 < l_1 < l_2. \tag{12}$$

Die Anwendung von Lemma 2 von Teil I, § 1, unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Folge $\{\log n\}$ ausgeglichen ist (vgl. Beispiel in A von Teil I, § 1), liefert uns die Ausgeglichenheit von $\{\log h_n\}$. Damit ist der Beweis der Zulässigkeit der Interpolationsstellenfolge $\{z_n\}$ erbracht.

Die Funktion $\alpha^z = \operatorname{Exp}(z \log \alpha)$ mit $\alpha \neq 0, 1$ und $|\alpha - 1|_p \leqq p^{-1}$ ist in der Umgebung von $z = 0$ in eine nicht abbrechende Potenzreihe (also kein Polynom!) entwickelbar, welche sicher für alle z mit $|z|_p \leqq 1$ konvergiert. Damit genügt die Funktion $f(z) = \alpha^z$ der Voraussetzung des Satzes I. Die Interpolationsstellen $z_n = a_n + b_n \beta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gehören alle dem Konvergenzbereich derselben an, da aus (5) und (6) $|z_n| \leqq p^{-\left[\frac{\log_p n}{2}\right]} \leqq 1$ folgt.

Es sei jetzt α^β als algebraisch vorausgesetzt, etwa vom Grade u, und α sei vom Grade t. Danach ist $\alpha^{z_n} = \alpha^{a_n + b_n \beta} = \alpha^{a_n} (\alpha^\beta)^{b_n}$ auch algebraisch von höchstens tu-tem Grade. Durch Anwendung der Lemmata 2 und 3 von Teil II, § 1 schätzen wir die Höhe H_n von α^{z_n} folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned} H_n = h_{\alpha^{a_n} \cdot (\alpha^\beta)^{b_n}} &< (tu)!\, 2^{3tu} (h_{\alpha^{a_n}} \cdot h_{(\alpha^\beta)^{b_n}})^{tu} \\ &\leqq (tu)!\, 2^{3tu} (t!\, 2^{a_n t} h_\alpha^{a_n} \cdot u!\, 2^{b_n u} h_{\alpha^\beta}^{b_n})^{tu} = C_0 C_1^{a_n} C_2^{b_n}, \end{aligned} \tag{13}$$

wobei $C_0 = (tu)!\, 2^{3tu} (t!\, u!)^{tu}$, $C_1 = (2^t h_\alpha)^{tu}$, $C_2 = (2^u h_{\alpha^\beta})^{tu}$ gesetzt wurden. Also sind C_0, C_1, C_2 von n unabhängig. Aus (13) folgt $\log H_n < \log C_0 + a_n \log C_1 + b_n \log C_2$, und mit Berücksichtigung von (3)

$$\log H_n < C_3 n, \quad C_3 \text{ von } n \text{ unabhängig}. \tag{14}$$

Wenn wir noch (12) in Betracht ziehen, so bekommen wir

$$\frac{\log H_n}{\log h_n} < \frac{C_3}{l_1} \frac{n}{\log n} \quad \text{für} \quad n > p^2, \tag{15}$$

d. h. $\log H_n = O\left(\frac{n}{\log n} \log h_n\right)$, also erst recht $\log H_n = o(n \log h_n)$, d. h. die Bedingung b) der Voraussetzung des Satzes I von Teil I ist verifiziert. Die Bedingung a) derselben hatten wir schon verifiziert, indem wir feststellten, daß $\alpha^{z_n} = \alpha^{a_n} (\alpha^\beta)^{b_n}$ algebraisch von höchstens tu-tem Grade ist.

Also unter der Annahme, daß α^β mit algebraischem, von 0 und 1 verschiedenem α und ganz algebraischem β algebraisch ist, folgt nach der Behauptung des Satzes I von Teil I, daß α^z eine algebraische Funktion i. a. S. von z sein muß. Das ist aber nicht der Fall. Der Widerspruch löst sich nur, wenn wir die Annahme fallen lassen. Es gilt also: Wenn α, β algebraisch mit den obigen Bedingungen sind, so ist α^β transzendent.

Anhang.

Hier bringen wir einen anderen Beweis des Hilfssatzes 6 von Teil I. Dieser Beweis, bei dem das Schnirelmannsche Integral herangezogen wird, steht der Herleitung der analogen Abschätzung von $\left|\frac{\Phi(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_\nu)}\right|_\infty$ beim Schneiderschen Satz I (Schneider [11]) viel näher als der erste Beweis.

Wir stellen unten die Definition und die Eigenschaften des Schnirelmannschen Integrals, die wir benutzen werden, kurz zusammen; für Beweise und Details sei auf eine Ausarbeitung (Loonstra [6], Kap. VI) der Schnirelmannschen Abhandlung (Schnirelmann [12]) verwiesen. Wir legen ferner das p-adische Gebiet zugrunde, obwohl die Resultate von Schnirelmann für irgendeinen nichtarchimedisch bewerteten, algebraisch abgeschlossenen und vollständigen Körper gültig sind.

Wir betrachten eine Folge von Polynomen

$$g_1(z),\ g_2(z),\ \ldots,\ g_i(z),\ \ldots$$

mit wachsenden Graden, ohne mehrfache Wurzeln und von der Form

$$g_i(z) = z^{n_i} + c_{i,1}z^{n_{i,1}} + \cdots + c_{i,j}z^{n_{i,j}} + c_{i,j+1},$$

wobei die Koeffizienten $c_{i,j} \neq 0$ ganze Elemente aus dem p-adischen Gebiet und $|c_{i,i+1}|_p = 1$ sind. Demnach haben die Beträge der Wurzeln dieser Polynome den Wert eins. Über die Exponenten $n_i > n_{i,1} > \cdots > n_{i,j}$ machen wir ferner die Einschränkungen

$$|n_i|_p = 1,\ n_i \to \infty,\ n_{i,k} \to \infty\,(k = 1, 2, \ldots, j),\ n_i - n_{i,1} \to \infty \text{ mit } i \to \infty.$$

(Ein Beispiel einer Folge von Polynomen, welche allen obigen Forderungen genügt, ist gegeben durch

$$g_i(z) = z^{n_i} - 1,\quad |n_i|_p = 1\ (i = 1, 2, \ldots) \text{ und } n_i \to \infty \text{ mit } i \to \infty.)$$

Mit Hilfe der Wurzeln $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n_i}$ von $g_i(z)$ bilden wir nun

$$\alpha + \varrho\alpha_{i,1},\quad \alpha + \varrho\alpha_{i,2}, \ldots, \alpha + \varrho\alpha_{i,n_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

wobei α und ϱ konstante Elemente aus dem p-adischen Gebiet sind. Eine solche Folge von Elementen nennt man einen mittels der Polynomfolge $g_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ definierten diskreten Kreis mit dem Mittelpunkt α und dem Radius $|\varrho|_p$; es sind nämlich alle Elemente der Folge $\alpha + \varrho\alpha_{i,k}$ von α um denselben Betrag $|\varrho\alpha_{i,k}|_p = |\varrho|_p$ entfernt. Wir bezeichnen diesen diskreten Kreis kurz mit $\alpha + \varrho g$.

Es sei $F(z)$ eine Funktion, die für alle Elemente aus dem p-adischen Gebiet definiert ist, welche dem diskreten Kreis $\alpha + \varrho g$ angehören. Unter dem *Schnirelmannschen Integral von $F(z)$ längs des diskreten Kreises $\alpha + \varrho g$* verstehen wir den Limes des Ausdrucks

$$\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} F(\alpha + \varrho\alpha_{i,k}) \quad \text{für } i \to \infty,$$

also den Mittelwert von $F(z)$ auf $\alpha + \varrho g$. Wir bezeichnen diesen Limes, falls er existiert, mit $\int\limits_{\alpha+\varrho g}^{z} F(z)$ und falls er von der speziellen Wahl der Polynome $g_i(z)$ unabhängig ist, mit $\int\limits_{\alpha,\varrho}^{z} F(z)$.

Einige Eigenschaften:

I. $$\int_{\alpha,\varrho}^{z} (aF_1(z) + bF_2(z)) = a \int_{\alpha,\varrho}^{z} F_1(z) + b \int_{\alpha,\varrho}^{z} F_2(z).$$

Die linke Seite existiert, wenn die beiden Integrale auf der rechten Seite existieren, und ist gleich der Summe der letzteren.

II. Für ein Polynom $P(z)$ existiert $\int_{\alpha,\varrho}^{z} P(z)$ und ist $= P(\alpha)$.

III. Es sei $F(z)$ eine Potenzreihe $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$, welche für $|z|_p < R$ konvergiert. Dann existiert für $|\alpha|_p < |\varrho|_p < R$ das Integral $\int_{\alpha,\varrho}^{z} F(z)$ und es gilt $\int_{\alpha,\varrho}^{z} F(z) = F(\alpha)$.

IV. Es sei $f(z)$ eine für $|z|_p < R$ konvergente Potenzreihe in z und $|\varrho|_p < R$. Dann existiert $\int_{0,\varrho}^{Z} F(Z)$, wobei $F(Z) = \dfrac{f(Z)\,Z}{Z - z}$ ist, und es gilt

$$\int_{0,\varrho}^{Z} \frac{f(Z)\,Z}{Z - z} = \begin{cases} f(z) & \text{für } |z|_p < |\varrho|_p \\ 0 & \text{für } |z|_p > |\varrho|_p. \end{cases}$$

V. Es gilt allgemeiner, wenn $|z - \alpha|_p \neq |\varrho|_p$ ist,

$$\int_{\alpha,\varrho}^{Z} \frac{f(Z)\,(Z - \alpha)}{Z - z} = \begin{cases} f(z) & \text{für } |z - \alpha|_p < |\varrho|_p \\ 0 & \text{für } |z - \alpha|_p > |\varrho|_p. \end{cases}$$

VI. Es gilt für $|z|_p < |\varrho|_p$

$$f^{(n)}(z) = n! \int_{0,\varrho}^{Z} \frac{f(Z)\,Z}{(Z - z)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

(Für $n = 0$ ist $f^{(0)}(z) = f(z)$ zu setzen.)

VII. Wenn $f(z)$ für $|z - \alpha|_p < |\varrho|_p$ eine Darstellung $f(z) = \int_{\alpha,\varrho}^{Z} \dfrac{f(Z)\,(Z - \alpha)}{Z - z}$ besitzt und außerdem auf dem Kreise vom Mittelpunkt α und Radius $|\varrho|_p$ die Abschätzung $|f(z)|_p \leqq \mathfrak{M}$ gilt, so ist für alle z mit $|z - \alpha|_p < |\varrho|_p$

$$|f(z)|_p \leqq \mathfrak{M}$$

und allgemeiner

$$|f^{(n)}(z)|_p \leqq \frac{\mathfrak{M}}{|\varrho|_p^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

VIII. Eine ganze Funktion, d. h. eine überall konvergente Potenzreihe, welche im ganzen p-adischen Gebiet beschränkt ist, ist eine Konstante.

Der obige Satz V stellt eine Übertragung der Cauchyschen Integralformel im komplexen Gebiet für den Fall eines Kreises auf das p-adische Gebiet dar. Diese letzte Formel lautet bekanntlich

(1) $$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}} \frac{f(Z)\,dZ}{Z - z} = \begin{cases} f(z) & \text{für } |z - \alpha|_\infty < |\varrho|_\infty \\ 0 & \text{für } |z - \alpha|_\infty > |\varrho|_\infty, \end{cases}$$

wobei α das Zentrum und $|\varrho|_\infty$ der Radius des Kreises $\mathfrak{K}$ sind, und $f(z)$ eine in einem den Kreis $\mathfrak{K}$ umfassenden Bereich*) eindeutige, regulär analytische Funktion ist. Daß wir hier für die Elemente des komplexen Gebiets dieselben Zeichen verwenden wie im p-adischen, läßt die Parallelität zwischen den beiden besser hervortreten und kann zu keiner Verwechslung Anlaß geben. Nach einem auf Cauchy zurückgehenden Gedanken kann aber auch das komplexe Integral auf der rechten Seite von (1) als der Limes eines Mittelwertes dargestellt werden (Cauchy [1], Pringsheim [8]). Um die Analogie bis zur formalen Identität weiterzuführen, wollen wir auch im komplexen Gebiet ein „*Schnirelmannsches Integral*" definieren, indem wir

$$\int_{\alpha,\varrho}^{z} F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F(\alpha + \varrho\alpha_{n,j}) \tag{2}$$

setzen, falls der Limes rechts existiert. Dabei bezeichnen $\alpha_{n,j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ die n-ten Einheitswurzeln, d. h. die Wurzeln von $g_n(z) = z^n - 1$. Wir zeigen jetzt, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F(\alpha + \varrho\alpha_{n,j})$$

für eine in einem Kreisring $R_1 < |\varrho|_\infty < R_2$ eindeutige regulär analytische Funktion $F(z)$ existiert und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F(\alpha + \varrho\alpha_{n,j}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}} \frac{F(Z)}{Z-\alpha}\, dZ \tag{3}$$

ist. Der Beweis folgt aus der Identität

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F(\alpha + \varrho\alpha_{n,j}) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \frac{F(\alpha + \varrho\alpha_{n,j})}{\varrho\alpha_{n,j}} \cdot \varrho\alpha_{n,j} \left(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1\right) \frac{\frac{2\pi i}{n}}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{F(Z_{n,j})}{Z_{n,j} - \alpha} (Z_{n,j+1} - Z_{n,j}) \right\} \frac{\frac{2\pi i}{n}}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1}$$

mit $Z_{n,j} = \alpha + \varrho\alpha_{n,j}$. Hieraus folgt (3) nach der Definition und dem Existenzsatz des bestimmten Integrals einer analytischen Funktion und mit Berücksichtigung von $\frac{\frac{2\pi i}{n}}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} \to 1$ für $n \to \infty$. Also haben wir für jede in einem Kreisring $R_1 < |\varrho|_\infty < R_2$ eindeutige, regulär analytische Funktion $F(z)$

$$\int_{\alpha,\varrho}^{z} F(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}} \frac{F(Z)}{Z-\alpha}\, dz, \tag{4}$$

wobei das linke Integral im eben definierten „Schnirelmannschen" und das rechte im gewöhnlichen „Cauchyschen" Sinne zu verstehen sind.

*) Das Wort „Bereich" wird hier als Synonym des in der Funktionentheorie üblicheren Wortes „Gebiet" verwendet.

Jetzt wenden wir auf die Funktion $F(Z) = \frac{f(Z)\,(Z-\alpha)}{Z-z}$, wobei $f(z)$ eine in einem den Kreis $|Z-\alpha|_\infty \leqq |\varrho|_\infty$ umfassenden Bereich eindeutige und regulär analytische Funktion ist und $|z-\alpha|_\infty \neq |\varrho|_\infty$ gilt, die Formel (4) an. Wir erhalten

$$\int\limits_{\alpha,\varrho}^{z} \frac{f(Z)\,(Z-\alpha)}{Z-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{f(Z)}{Z-z}\,dz. \tag{5}$$

Aus (1) und (5) folgt endlich

$$\int\limits_{\alpha,\varrho}^{z} \frac{f(Z)\,(Z-\alpha)}{Z-z} = \begin{cases} f(z) & \text{für } |z-\alpha|_\infty < |\varrho|_\infty \\ 0 & \text{für } |z-\alpha|_\infty > |\varrho|_\infty, \end{cases} \tag{6}$$

womit der formale Anschluß an V geleistet ist. Es gilt ferner

$$|f(z)| \leqq \mathfrak{M} \tag{7}$$

für beiderlei Bewertungen, wenn $\mathfrak{M}$ das Maximum von $|f(z)|$ auf der Kreisperipherie $|Z-\alpha| = |\varrho|$ und z einen inneren Punkt desselben Kreises bezeichnet ($|z-\alpha| < |\varrho|$). Dabei ist $f(z)$ in einem den Kreis $|z-\alpha| \leqq |\varrho|$ umfassenden Bereich eindeutig und regulär analytisch. Für das komplexe Gebiet ist (7) das Maximumprinzip für einen Kreis. Für das p-adische Gebiet folgt es aus V und VII.

Die obige Herleitung der Formel (6) aus (2) trägt den Charakter einer Verifikation. Man könnte jedoch den Umweg über funktionentheoretische Sätze vermeiden. Es ist anzunehmen, daß sich Schnirelmann von der auf Cauchy zurückgehenden Mittelwertdefinition des bestimmten Integrals auf einem Kreis im komplexen Gebiet hat leiten lassen.

Nun wollen wir (7) auf die Funktion $\frac{\Phi(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_\nu)}$ von Hilfssatz 6 von Teil I, § 2 mit $\alpha = \zeta$ und $|\varrho| = |z-\zeta| = r$, $|z-\zeta| < \frac{r}{8}$, $|z_1-\zeta| < \frac{r}{8}, \ldots, |z_\nu-\zeta| < \frac{r}{8}$ anwenden, wobei $\Phi(z)$ in einem den Kreis $|z-\zeta| \leqq r$ umfassenden Bereich eindeutig und regulär analytisch war. Es waren außerdem $\Phi(z_1) = 0, \ldots, \Phi(z_\nu) = 0$.

Danach ist offensichtlich auch $\frac{\Phi(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_\nu)}$ in demselben Bereich eindeutig und regulär analytisch. Es gilt nach (7)

$$\left|\frac{\Phi(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_\nu)}\right| \leqq \operatorname*{Max}_{|Z-\zeta|=r} \left|\frac{\Phi(Z)}{(Z-z_1)(Z-z_2)\cdots(Z-z_\nu)}\right|. \tag{8}$$

Aus $|Z-z_j| \geqq \big||Z-\zeta| - |z_j-\zeta|\big|_\infty > \frac{7r}{8}$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ folgert man

$$\operatorname*{Max}_{|Z-\zeta|=r} \left|\frac{\Phi(Z)}{(Z-z_1)\cdots(Z-z_\nu)}\right| \leqq \left(\frac{7r}{8}\right)^{-\nu} \operatorname*{Max}_{|Z-\zeta|=r} |\Phi(Z)|. \tag{9}$$

Andererseits ist (Teil I, § 2, (10) und (13))

$$|\Phi(Z)| \leqq \mathfrak{C} \sum_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_N=0,0,\ldots,0}^{m_1,m_2,\ldots,m_N} |f_1(Z)|^{\mu_1}\,|f_2(Z)|^{\mu_2}\cdots|f_N(Z)|^{\mu_N}. \tag{10}$$

Da die Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(k)}(z-\zeta)^j = f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{11}$$

für $|z-\zeta| = r$ als absolut konvergent vorausgesetzt worden sind (vgl. die Voraussetzungen der Hilfssätze 6 und 5 von Teil I, § 2), sind

$$\varphi(r) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_j^{(k)}| \, r^j \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{12}$$

konvergent. Aus (10), (11) und (12) folgt

$$|\Phi(Z)| \leqq \mathfrak{C} \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N = 0, 0, \ldots, 0}^{m_1, m_2, \ldots, m_N} (\varphi_1(r))^{\mu_1} (\varphi_2(r))^{\mu_2} \cdots (\varphi_N(r))^{\mu_N}$$

und daraus

$$\begin{aligned} |\Phi(Z)| &\leqq \mathfrak{C}(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_N+1)\,(\mathrm{Max}\,(1, \varphi_1(r)))^{m_1} \\ &\qquad (\mathrm{Max}\,(1, \varphi_2(r)))^{m_2} \cdots (\mathrm{Max}\,(1, \varphi_N(r)))^{m_N} \\ &\leqq \mathfrak{C}\gamma_1^{m_1}\gamma_2^{m_2}\cdots\gamma_N^{m_N} \text{ mit } \gamma_k = 2\,\mathrm{Max}\,(1, \varphi_k(r)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \end{aligned} \tag{13}$$

Aus (8), (9) und (13) erhalten wir endlich

$$\left| \frac{\Phi(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_\nu)} \right| < \mathfrak{C} \cdot \gamma_1^{m_1}\gamma_2^{m_2}\cdots\gamma_N^{m_N} \cdot \gamma_0^{\nu} \tag{14}$$

mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ wie oben und $\gamma_0 > \mathrm{Max}\left(1, \frac{8}{7r}\right)$. Bei (14) sind $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N > 1$ von ζ, r und $f_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, aber nicht von $c_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_N}$ und ν abhängig. Damit ist der Hilfssatz 6 von Teil I, § 2 erneut bewiesen.

Literaturverzeichnis.

[1] *A. L. Cauchy*, Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence (1840) Oeuvres Série II T. 11 (1913), S. 330ff.

[2] *K. Dörge*, Entscheidung des algebraischen Charakters von Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten auf Grund ihres Wertevorrates. Math. Ann. **122** (1950), S. 259—275.

[3] *H. Hasse*, Zahlentheorie. Akademie Verlag Berlin 1949.

[4] *E. Hecke*, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig 1923.

[5] *A. Günther*, Über transzendente $\mathfrak{p}$-adische Zahlen I. Journ. f. d. reine und angew. Math. **192** (1953), S. 155—166.

[6] *F. Loonstra*, Analytische Untersuchungen über bewertete Körper. Amsterdam 1941.

[7] *K. Mahler*, Über transzendente p-adische Zahlen. Compositio Math. **2** (1935), S. 259—275.

[8] *A. Pringsheim*, Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Funktionen. Math. Ann. **47** (1896), S. 121—154.

[9] *Th. Schneider*, Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise. Math. Ann. **121** (1949), S. 131—140.

[10] *Th. Schneider*, Transzendente Zahlen I und II. Ausarbeitung einer Vorlesung, gehalten in Göttingen im SS 1950 und WS 1950—51 (unveröffentlicht).

[11] *Th. Schneider*, Zur Charakterisierung der algebraischen und rationalen Funktionen durch ihre Funktionswerte. Acta Math. **86** (1951), S. 57—70.

[12] *L. H. Schnirelmann*, Über Funktionen in algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körpern. Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Série Math. 1938, S. 487—496.

[13] *C. L. Siegel*, Approximation algebraischer Zahlen. Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 173—213.

[14] *C. L. Siegel*, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss. Jahrgang 1929, Phys.-Math. Klasse Nr. 1, Berlin 1930.

[15] *G. R. Veldkamp*, Ein Transzendenzsatz für p-adische Zahlen. Journ. of the London Math. Soc. **15** (1940), S. 183—192.

Eingegangen 28. Dezember 1955.

Cyclic permutations with sequences and related problems.

By *A. van Heemert* (Apeldoorn, Netherlands).

0. Introduction. In some previous papers (compare [1] und [2]) problems of the following type have been treated. Consider a permutation $a_1 a_2 \ldots a_n$ of the numbers $1, 2, \ldots, n$. If $a_{p+1} - a_p = 1$, $p = 1, \ldots, n-1$, the pair $a_p a_{p+1}$ is said to form a sequence of the considered permutation. It is asked to determine the number of permutations with a given number of sequences. In the present paper a similar but more general problem will be discussed using a completely different method, which can also be applied to the problems mentioned above. However most of the results in [1] will be deduced directly from those given here. The problem to be considered here can, provisionally, be formulated thus: Let $1, 2, \ldots, n$ indicate n cyclically ordered objects where $p+1$ follows p and 1 follows n. Now, if $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ is a cyclic permutation of $1, \ldots, n$ i. e. a_{p+1} follows a_p and a_1 follows a_n, we define a (cyclic) sequence as a pair $a_p a_{p+1}$ for which $a_{p+1} - a_p \equiv 1 \pmod{n}$ or the pair $a_n a_1$ if $a_1 - a_n \equiv 1 \pmod{n}$. This means, that the notion of sequence is derived from the given cyclic order $\{1, \ldots, n\}$. Now we generalize as follows: We consider cyclic permutations of given objects but we derive the notion of a sequence not from a given cyclic order of all the considered objects but from given cyclic orders defined in some disjoint subsets of these objects. Again we state the problem of the determination of the number of cyclic permutations with a given number of sequences. It appears, that the main difficulties lie in the calculation of the number of cyclic permutations with zero sequences.

Before we can deal efficiently with this problem we must introduce some useful concepts.

Γ_n, $n = 1, 2, \ldots$: cyclically ordered set of n elements $\{a_1, \ldots, a_n\}$; a_{p+1} follows a_p, a_1 follows a_n. Different cyclically ordered sets with the same number of elements will be distinguished by an upper index.

x', $x \in \Gamma_n$: the element of Γ_n which follows x in the given cyclic order.

$x^{(p)}$, $x \in \Gamma_n$: inductively by $x^{(1)} = x'$, $x^{(p+1)} = (x^{(p)})'$, $x^{(p)} = x^{(q)}$ if and only if $p \equiv q \pmod{n}$ (p and q integers). As no confusion can arise the same symbols „$'$" and „$^{(p)}$" will be used in each cyclically ordered set to be considered, the meaning in each case being derived from the cyclic order of the set to which the element, to which this operation is applied, belongs.

segment of Γ_n: the linearly ordered set $[a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(k-1)}]$, $a = a^{(0)} \in \Gamma_n$, $1 \leqq k \leqq n$. The order is, in an obvious way, induced by the cyclic order of Γ_n.

decomposition of Γ_n: a decomposition of Γ_n into disjoint segments whose elements make up together all elements of Γ_n. The cyclic order in Γ_n induces a cyclic order in such a decomposition: If Σ' and Σ'' are elements of the decomposition, then Σ'' follows Σ' if and only if the first element

of Σ'' follows the last element of Σ' with respect to the cyclic order of Γ_n. Denoting the decomposition by σ, the cyclically ordered set of its elements is denoted by $\sigma\Gamma_n$.

isomorphism: two cyclically ordered sets Γ_n and Γ'_n with the same number of elements are called isomorphic.

It is observed, that if σ is a decomposition of Γ_n into one element:

$$[a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(n-1)}], \quad a = a^{(0)} \in \Gamma_n$$

then $\sigma\Gamma_n$ is isomorphic to Γ_1; $\sigma\Gamma_n$ has, then, only one element which is its own successor.

The following lemma is trivial:

Lemma 0. *If σ_n^m is the number of different ways of decomposing Γ_n into m disjoint segments ($m = 1, 2, \ldots, n$), then*

$$\sigma_n^m = \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

and the cyclically ordered set of segments is in each case isomorphic to Γ_{n-m}.

If A is a finite set of n elements, there are $(n-1)!$ of ways to arrange these elements into a cyclically ordered set. Let π denote some cyclic order defined in the elements of A and πA the corresponding cyclicly ordered set, then πA will be called a cyclic permutation of the elements of A. Different cyclic orders will, if necessary, be marked by indices. There are, obviously, $(n-1)!$ cyclic permutations of the elements of A. The element $a \in A$ considered as an element of πA will be denoted by πa.

1. Statement of the problem. Consider a number of cyclicly ordered sets Γ_{n_1}, $\Gamma_{n_2}, \ldots, \Gamma_{n_j}$, no two of which have an element in common. No difficulties, as to their identification, will arise from the fact that two or more of the indices n_i can be equal. Let

$$G = \bigcup_{i=1}^{j} \Gamma_{n_i}$$

be the set theoretic union and πG a cyclic permutation of the elements of G. If, now, for some $p \in \Gamma_{n_i}$, $i = 1, \ldots, j$,

$$(\pi p)' = \pi p',$$

the elements $p, p' \in \Gamma_{n_i}$ are said to form an i-sequence in πG. If the index i is not relevant, we speak simply of a sequence. We denote by

s_π the number of sequences in πG,
s_π^i the number of i-sequences in πG

and observe, that

$$0 \leqq s_\pi^i \leqq n_i - 1 \quad \text{for } j > 1,\ i = 1, \ldots, j, \tag{1.1}$$

$$s_\pi^1 \neq n_1 - 1, \quad s_\pi^1 \neq n_1 - 2 \quad \text{for } j = 1, \tag{1.2}$$

$$s_\pi = \sum_{i=1}^{j} s_\pi^i. \tag{1.3}$$

Let, further,

$$C_{n_1, \ldots, n_j}^{s_1, \ldots, s_j}, \quad 0 \leqq s_i \leqq n_i,\ i = 1, 2, \ldots, j,$$

denote the number of cyclic permutations of the elements of G such that

$$s_\pi^i = s_i,\ i = 1, \ldots, j,$$

and define

$$\gamma_{n_1, \ldots, n_j} = C_{n_1, \ldots, n_j}^{s_1, \ldots, s_j} \text{ with } s_i = 0,\ i = 1, \ldots, j.$$

Hence, $\gamma_{n_1,\ldots,n_j}$ is the number of cyclic permutations of the elements of G without sequences. Obviously the $\gamma_{n_1,\ldots,n_j}$ are symmetric functions of their indices.

For convenience, we admit also values $n_i = 0$, putting

$$C^{s_1,\ldots,s_j}_{n_1,\ldots,n_j} = 0 \text{ if } j > 1 \text{ and } n_i = 0 \text{ for at least one } i, \tag{1. 4}$$

hence

$$\gamma_{n_1,\ldots,n_j} = 0 \text{ if } j > 1 \text{ and } n_i = 0 \text{ for at least one } i. \tag{1. 5}$$

Further we put, if $j = 1$,

$$C^0_0 = \gamma_0 = 1. \tag{1. 6}$$

It is, finally, observed that for $j = 1$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \tag{1. 7}$$

as can be easily verified.

Now we prove

Lemma 1.

$$C^{s_1,\ldots,s_j}_{n_1,\ldots,n_j} = \left\{\prod_{i=1}^{j}\binom{n_i}{s_i}\right\}\cdot\gamma_{n_1-s_1,\ldots,n_j-s_j}. \tag{1. 8}$$

Proof. We first observe that according to (1. 1), (1. 4), (1. 5) and (1. 6) this formula is true if one of the s_i equals n_i. Further (1. 8) is easily verified if $j = 1$ and $s_1 = n_1 - 1$ or $n_2 - 1$ (compare (1. 2)). Let, in all other cases, πG be a cyclic permutation of the elements of G with $s^i_\pi = s_i$, $i = 1, \ldots, j$. We consider the maximal segments of πG which are also segments of one of the Γ_{n_i}. Obviously there are exactly $n_i - s_i$ of these maximal segments which are also segments of Γ_{n_i}. Now decompose πG in the segments which are maximal in the above given sense. Each element of this decomposition is, hence, a segment of one of the Γ_{n_i}. If σ denotes this decomposition of πG and σ_i the corresponding decomposition of Γ_{n_i}, $i = 1, \ldots, j$, then $\sigma\pi G$ will be a cyclic permutation of the elements of the set theoretic union $\bigcup_{i=1}^{j} \sigma_i \Gamma_{n_i}$ with the property that it has no sequences. This follows immediately from the maximality of the elements of $\sigma\pi G$. The number of elements of $\sigma_i\Gamma_{n_i}$ is $n_i - s_i$. It is easily verified that to each fixed decomposition of each of the Γ_{n_i} in $n_i - s_i$ segments corresponds a total of $\gamma_{n_1-s_1,\ldots,n_j-s_j}$ different cyclic permutations π of G with $s^i_\pi = s^i$, $i = 1, \ldots, j$. Further, different decompositions σ_i obviously lead to different cyclic permutations of G and hence according to Lemma 0 we obtain the desired formula (1. 8).

If it is possible to determine the $\gamma_{n_1,\ldots,n_j}$, the problem stated above will be solved. For, then we can calculate the numbers $C^{s_1,\ldots,s_j}_{n_1,\ldots,n_j}$ and the number of permutations with exactly s sequences will be given by

$$X^s_{n_1,\ldots,n_j} = \sum_{\Sigma s_i = s} C^{s_1,\ldots,s_j}_{n_1,\ldots,n_j}. \tag{1. 9}$$

If, now, A is a set of n elements and to certain subsets of $n_1, n_2, \ldots, n_j$ elements, $n = \sum_{i=1}^{j} n_i$, cyclic orders are assigned, then the cyclic permutations of the elements of A with s sequences is obviously the number given by (1. 9). The case $\sum_{i=1}^{j} n_i < n$ is also included, for, in this case we have only to add numbers $n_{j+1} = n_{j+2} = \cdots = n_l = 1$ such that $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$ and to read afterwards j for l.

We arrive, now, at the equations for the quantities $\gamma_{n_1,\ldots,n_j}$ as follows. As the number of cyclic permutations of n elements is $(n-1)!$ we have

$$\sum C^{s_1,\ldots,s_j}_{n_1,\ldots,n_j} = \left(\sum_{i=1}^{j} n_i - 1\right)!, \tag{1. 10}$$

where the summation at the left hand side goes over all admissible values of $s_1, \ldots, s_j$, i. e. $0 \leqq s_i \leqq n_i$, $i = 1, \ldots, j$. This yields

$$\sum_{\substack{0 \leq s_i \leq n_i \\ j=1,\ldots,i}} \left\{\prod_{i=1}^{j} \binom{n_i}{s_i}\right\} \gamma_{n_1-s_1,\ldots,n_j-s_j} = \left(\sum_{i=1}^{j} n_i - 1\right)! \tag{1. 11}$$

or

$$\sum_{\substack{0 \leq s_i \leq n_i \\ i=1,\ldots,j}} \left\{\prod_{i=1}^{j} \binom{n_i}{s_i}\right\} \gamma_{s_1,\ldots,s_j} = \left(\sum_{i=1}^{j} n_i - 1\right). \tag{1. 12}$$

Here, for $j > 1$, $\left(\sum_{i=1}^{j} n_i - 1\right)!$ must be taken to be zero if at least one of the $n_i = 0$. For, in this case, also $s_i = 0$ and hence the left hand side of (1. 12) is equal to zero. If, however, $j = 1$ we have for $n_1 = 0$ that also $s_1 = 0$ and as $\gamma_0 = 1$ we must put $(n_1 - 1)! = 1$ for $n_1 = 0$ in order that (1. 12) shall remain valid.

2. Solution of a system of linear equations. We consider here a system of linear equations of the type of (1. 12):

$$\sum_{\substack{0 \leq s_i \leq n_i \\ i=1,\ldots,j}} \left\{\pi \binom{n_i}{s_i}\right\} z_{s_1,\ldots,s_j} = \alpha_{n_1,\ldots,n_j}, \quad n_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, j, \tag{2. 1}$$

where, for the moment, the $\alpha_{n_1,\ldots,n_j}$ are arbitrary. We will give the unique and explicit solution of this system. First we introduce the commutative operators O_i, $i = 1, \ldots, j$, operating on the indices of quantities $\lambda_{p_1,\ldots,p_j}$ as follows:

$$O_i \lambda_{p_1,\ldots,p_j} = \lambda_{p_1,\ldots,p_{i-1},p_i-1,p_{i+1},\ldots,p_j} \tag{2. 2}$$

(it is evident how this must be read for $i = 1$ or $i = j$).

Then the system (2. 1) can be written in the form

$$\left\{\prod_{i=1}^{j} (1 + O_i)^{n_i}\right\} \cdot z_{n_1,\ldots,n_j} = \alpha_{n_1,\ldots,n_j}, \quad n_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, j. \tag{2. 3}$$

Lemma 2. *The unique solution of* (2. 3) *is given by*

$$z_{n_1,\ldots,n_j} = \left\{\prod_{i=1}^{j} (1 - O_i)^{n_i}\right\} \alpha_{n_1,\ldots,n_j}, \quad n_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, j. \tag{2. 4}$$

Proof. We proceed by induction. It is obvious that (2. 4) is true for $n_1 = n_2 = \cdots = n_j = 0$:

$$z_{0,0,\ldots,0} = \alpha_{0,0,\ldots,0}$$

for arbitrary values of the right hand sides of (2. 3). Now let (2. 4) be true for all indices $n_1, \ldots, n_j$ with $n_i \leqq m_i\, m_i$, $(i = 1, \ldots, j)$ being fixed. We prove that (2. 4) remains true if one of the indices e. g. m_1 is replaced by $m_1 + 1$. We have to solve, then, the equations

$$(1 + O_1)^{m_1+1} \cdot \prod_{i=2}^{j} (1 + O_i)^{n_i} z_{m_1+1,\, n_2,\ldots,n_j} = \alpha_{m_1+1,\, n_2,\ldots,n_j}, \quad n_i \leqq m_i,\ i = 2, \ldots, j.$$

This can be done by considering the more extended system

$$\prod_{i=1}^{j} (1 + O_i)^{l_i} z_{l_1,\ldots,l_j} = \alpha_{l_1,\ldots,l_j},\ 1 \leqq l_1 \leqq m_1 + 1,\ 0 \leqq l_i \leqq m_i,\ i = 2, \ldots, j,$$

which can be written as

$$(2.5) \qquad (1 + O_1)^{l_1 - 1} \prod_{i=2}^{j} (1 + O_i)^{l_i} [z_{l_1,\ldots,l_j} + z_{l_1-1,l_2,\ldots,l_j}] = \alpha_{l_1,\ldots,l_j}.$$

The induction hypothesis now gives on substitution the validity of

$$(1 + O_1)^{l_1 - 1} \prod_{i=2}^{j} (1 + O_i)^{l_i} z_{l_1-1,l_2,\ldots,l_j} = \alpha_{l_1-1,l_2,\ldots,l_j},\ 1 \leqq l_1 \leqq m_1 + 1,\ 0 \leqq l_i \leqq m_i,\ i = 2, \ldots, j.$$

Hence (2. 5) yields the new system

$$(1 + O_1)^{l_1 - 1} \prod_{i=2}^{j} (1 + O_i)^{l_i} z_{l_1,\ldots,l_j} = \alpha_{l_1,\ldots,l_j} - \alpha_{l_1-1,l_2,\ldots,l_j} = (1 - O_i)\, \alpha_{l_1,\ldots,l_j}$$

which will be considered as a system in the unknowns

$$z_{l_1,\ldots,l_j},\ 1 \leqq l_1 \leqq m_1 + 1,\ 0 \leqq l_i \leqq m_i,\ i = 2, \ldots, j.$$

This system is precisely of the form (2. 3) and according to the induction hypothesis its solution is given by

$$\begin{aligned} z^*_{l_1,\ldots,l_j} &= (1 - O_i)^{l_i - 1} \prod_{i=2}^{j} (1 - O_i)^{l_i} (1 - O_i)\, \alpha_{l_1,\ldots,l_j} \\ &= \prod_{i=1}^{j} (1 - O_i)^{l_i} \alpha_{l_1,\ldots,l_j},\ 1 \leqq l_1 \leqq m_1 + 1,\ 0 \leqq l_i \leqq m_i,\ i = 2, \ldots, j. \end{aligned}$$

It is clear that, for $l_1 < m_1 + 1$, this result is identical with that which is stated in the induction hypothesis, while for $l_1 = m_1 + 1$ it yields the desired result.

3. Calculation of the $\gamma_{n_1,\ldots,n_j}$. If we apply Lemma 2 to the equations (1. 12) the following substitutions have to be introduced into (2. 4):

$$\begin{aligned} j = 1&:\ \alpha_0 = 1 \text{ and } \alpha_{n_1} = (n_1 - 1)! \text{ for } n_1 > 0 \\ j > 1&:\ \alpha_{n_1,\ldots,n_j} = 0 \text{ if at least one of the } n_i = 0 \\ &\qquad \alpha_{n_1,\ldots,n_j} = \left(\sum_{i=1}^{j} n_i - 1\right)! \text{ otherwise.} \end{aligned}$$

This means, by the way, that for $j > 1$ the term with $O_i^{n_i}$ has to be dropped in the expansion of $(1 - O_i)^{n_i}$ while for the rest each O_i can be identified with an operator which lowers the argument in $\left(\sum_{i=1}^{j} n_i - 1\right)!$ by one unit.

The explicit solution is obtained if we substitute the above given values of $\alpha_{n_1,\ldots,n_j}$ in

$$(3.1) \qquad \gamma_{n_1,\ldots,n_j} = \sum_{\substack{l_i = 0 \\ i = 1,\ldots,j}}^{n_i} \left\{ \prod_{i=1}^{j} (-1)^{n_i - l_i} \binom{n_i}{l_i} \right\} \alpha_{l_1,\ldots,l_j}.$$

In particular, for $j = 1$, putting $n_1 = n$:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \gamma_n = \sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} \alpha_l \\ \quad = \binom{n}{n} (n-1)! - \binom{n}{n-1} (n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} 0! + (-1)^n \binom{n}{0} (-1)! \\ \quad = n! \left\{ \frac{1}{n \cdot 0!} - \frac{1}{(n-1) \cdot 1!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{1 \cdot (n-1)!} + \frac{(-1)^n}{1 \cdot n!} \right\} \end{cases}$$

where, for the present purpose, $(-1)! = 1$ by definition.

Thus γ_n is recognized as the n-th difference of $(n-1)!$ in the series

$$(-1)! = 1, 0!, 1!, \ldots, (n-1)!\,.$$

The first nine of them can be taken from the following scheme

$$\begin{array}{lllllllll}
\gamma_0 = 1 & 1 & 1 & 2 & 6 & 24 & 120 & 720 & 5040 \\
\gamma_1 = 0 & 0 & 1 & 4 & 18 & 96 & 600 & 4320 & \\
\gamma_2 = 0 & 1 & 3 & 14 & 78 & 504 & 3720 & & \\
\gamma_3 = 1 & 2 & 11 & 64 & 426 & 3216 & & & \\
\gamma_4 = 1 & 9 & 53 & 362 & 2790 & & & & \\
\gamma_5 = 8 & 44 & 309 & 2428 & & & & & \\
\gamma_6 = 36 & 265 & 2119 & & & & & & \\
\gamma_7 = 229 & 1854 & & & & & & & \\
\gamma_8 = 1625 & & & & & & & &
\end{array}$$

With (3. 1) we have obtained, at least in principle, explicit formulae for the $\gamma_{n_1,\ldots,n_j}$ and hence for the $C^{s_1,\ldots,s_j}_{n_1,\ldots,n_j}$ according to (1. 8). Then (1. 9) yields de desired values of $X^i_{n_1,\ldots,n_j}$. For $j = 1$, we have the explicit formula

$$\text{(3. 3)} \quad C^i_n = \binom{n}{s}\gamma_{n-s}$$
$$= \frac{n!}{s!}\left\{\frac{1}{(n-s)0!} - \frac{1}{(n-s-1)1!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} + \frac{(-1)^{n-s}}{(n-s)!}\right\}.$$

In the rest of the present paper we will fix our attention to properties of the quantities $\gamma_{n_1,\ldots,n_j}$. We will derive generating functions for them. Moreover we deduce a number of recursion formulae.

Remark. The series of the successive differences of $n!$ which is found in the preceding scheme at the right of the γ_i's will be denoted by $\beta_0, \beta_1, \ldots,$ thus

$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2, \beta_4 = 9 \text{ etc.}$$

This series has the following remarkable property

$$\text{(3. 4)} \qquad \beta_n = n\beta_{n-1} + (-1)^n$$

as can be shown directly with the help of known formulae of the calculus of differences but which will be proved here later on in connection with other recursion formulae.

4. A remark on successive differences. We intend here to operate formally with power series in one ore more variables. It is well known that this is admissible, even if formal (i. e. term by term) differentiation and formal substitution of a power series for one of the variables are included.

Let

$$\alpha_{0,0}, \alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \ldots$$

be a series of numbers, and let the successive differences be defined by

$$\text{(4. 1)} \qquad \alpha_{i,k+1} = \alpha_{i+1,k} - \alpha_{i,k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

We write this in a scheme similar to that given in section **3**:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \alpha_{2,0} & \alpha_{3,0} & \alpha_{4,0} & \alpha_{5,0} & \alpha_{6,0} & \cdots \\
\alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \alpha_{3,1} & \alpha_{4,1} & \alpha_{5,1} & \cdots & \\
\alpha_{0,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} & \alpha_{4,2} & \cdots & & \\
\alpha_{0,3} & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} & \cdots & & & \\
\alpha_{0,4} & \alpha_{1,4} & \alpha_{2,4} & \cdots & & & & \\
\alpha_{0,5} & \alpha_{1,5} & \cdots & & & & & \\
\alpha_{0,6} & \cdots & & & & & & \\
\cdot & & & & & & &
\end{array}
$$

Hence $\alpha_{i,k}$ will be called the k-th difference of $\alpha_{i+k,0}$. We adjoin the formal power series

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_{i,0}}{i!} x^i \tag{4. 2}$$

to the series of 0-th differences and the formal power series

$$A(x, y) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{i,k}}{i!\,k!} \cdot x^i y^k \tag{4. 3}$$

to the whole system of the $\alpha_{i,k}$.

Lemma 3. *In the sense of formal operations with power series*

$$A(x, y) = e^{-y} A(x + y). \tag{4. 4}$$

Proof. Let

$$B(x, y) = e^{-y} A(x + y) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{\beta_{i,k}}{i!\,k!} x^i y^k.$$

Observe, first

$$\beta_{i,0} = \alpha_{i,0}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4. 5}$$

Further

$$\frac{\partial B}{\partial x} = e^{-y} A'(x + y), \quad A'(x) = \frac{dA}{dx},$$

and

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -e^{-y} A(x + y) + e^{-y} A'(x + y)$$

so that

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -B + \frac{\partial B}{\partial x}.$$

This implies evidently

$$\beta_{i,k+1} = -\beta_{i,k} + \beta_{i+1,k}$$

and, according to (4. 1) and (4. 5)

$$\alpha_{i,k} = \beta_{i,k} \qquad i, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

i. e.

$$A(x, y) = B(x, y) = e^{-y} A(x + y).$$

If conversely, the series of the $\alpha_{0,k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, is given and the corresponding power series

$$C(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{0,k}}{k!} y^k,$$

then we have

$$A(x, y) = e^x C(x + y)$$

and especially it follows that

$$A(x) = e^x C(x) \tag{4. 6}$$

which is the formal counterpart of

$$C(y) = e^{-y} A(y) \tag{4. 7}$$

which follows from (4. 4).

5. A lemma on polynomials. Let Ξ_n be the set of all linear polynomials

$$\xi_p = \sum_{j=1}^{p} x_{i_j}, \; p = 1, \ldots, n, \; 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqq n \tag{5. 1}$$

in the variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, the index p in ξ_p denoting the number of variables which actually occur in it.

Lemma 4. *For any integer* $N \geqq 0$

$$\sum_{\substack{\Sigma \lambda_i = N \\ \lambda_i \geqq 1}} \frac{N!}{\lambda_1!\, \lambda_2! \cdots \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} = \sum_{\substack{\xi_p \in \Xi_n \\ p = 1, 2, \ldots, n}} (-1)^{n-p} \xi_p^N. \tag{5. 2}$$

Especially for $N < n$

$$\sum_{\substack{\xi_p \in \Xi_n \\ p = 1, 2, \ldots, n}} (-1)^{n-p} \xi_p^N = 0. \tag{5. 3}$$

Proof. The term ξ_n^N at the right hand side of (5. 2) contains already the totality of terms at the left hand side of the same equality. No other powers ξ_p^N yield terms which contain all x_i. It is, hence, sufficient to prove that all other terms in $\Sigma(-1)^{n-p}\xi_p^N$ cancel, i. e. that any term in which at least one of the x_i, e. g. x_n, does not occur obtains the coefficient zero. We may assume that the variables not occurring in this term are $x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_n$. If μ_i is the exponent of x_i we have $\sum_{i=1}^{q} \mu_i = N$. In each of the powers ξ_p^N in which a term with $x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_q^{\mu_q}$ occurs, it occurs with the same coefficient, viz.

$$\frac{N!}{\mu_1!\, \mu_2! \cdots \mu_q!},$$

and we must have in this case $q \leqq p \leqq n$. Now for any given p which fullfills these inequalities there are exactly

$$\binom{n-q}{p-q} = \binom{n-q}{n-p}$$

powers ξ_p^N containing a term with $x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_q^{\mu_q}$. Hence the coefficient of this term in the right hand side of (5. 2) is

$$\frac{N!}{\mu_1!\, \mu_2! \cdots \mu_q!} \cdot \left\{ \binom{n-q}{0} - \binom{n-q}{1} + \binom{n-q}{2} - \cdots + (-1)^{n-q} \binom{n-q}{n-q} \right\} = 0$$

according to a well known formula. Herewith, all has been proved, evidently also the case $N < n$.

6. Generating functions. Using the previous results, we derive now generating functions for the quantities $\gamma_{n_1,\ldots,n_m}$, i. e. functions of m variables $x_1, \ldots, x_m$, which expanded into a Mac Laurin series have the coefficients

$$\frac{\gamma_{n_1,\ldots,n_m}}{n_1! \cdots n_m!}.$$

We begin with the easy case $m = 1$. As stated at the end of section **4**, the γ_n are the n-th differences of $(n-1)!$ in the series

$$(-1)! = 1, 0!, 1!, 2!, \ldots.$$

In the notation of section **4**, we put

$$\alpha_{0,0} = 1, \ \alpha_{i,0} = (i-1)!, \ i \geqq 1,$$

and consider the formal power series

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_{i,0}}{i!} x^i.$$

This is, for $|x| < 1$, convergent to the function $1 - \ln(1-x)$. In fact

$$1 - \ln(1-x) = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i-1)!}{i!} x^i.$$

Hence, according to (4. 7),

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_i}{i!} x_1^i = e^{-x_1}\{1 - \ln(1-x_1)\}, \tag{6. 1}$$

which is the desired result for $m = 1$.

Returning now to the general case $m > 1$, consider the (provisionally formal) power series

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\substack{n_i \geqq 0 \\ i=1,\ldots,m}} \frac{\gamma_{n_1,\ldots,n_m}}{n_1! \cdots n_m!} x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m} \\ &\quad = \sum_{\substack{n_i \geqq 0 \\ i=1,\ldots,m}} \sum_{j_i=0}^{n_i} \left\{\prod_{i=1}^{m} (-1)^{n_i - j_i} \binom{n_i}{j_i}\right\} \frac{\alpha_{j_1,\ldots,j_m}}{n_1! \cdots n_m!} x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m} \\ &\quad = \prod_{k=1}^{m} \left\{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x_k^i}{i!}\right\} \cdot \sum_{\substack{j_i \geqq 0 \\ i=1,\ldots,m}} \frac{\alpha_{j_1,\ldots,j_m}}{j_1! \cdots j_m!} x_1^{j_1} \cdots x_m^{j_m} \\ &\quad = e^{-\sum_{k=1}^{m} x_k} \cdot \Phi(x_1, \ldots, x_m) \end{aligned}\right. \tag{6. 2}$$

(compare (3. 1)). Here

$$\Phi(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\substack{j_i \geqq 0 \\ i=1,\ldots,m}} \frac{\alpha_{j_1,\ldots,j_m}}{j_1! \cdots j_m!} x_1^{j_1} \cdots x_m^{j_m} \tag{6. 3}$$

with

$$\alpha_{j_1,\ldots,j_m} = \begin{cases} 0 \text{ if at least one } j_i = 0 \\ \left(\sum_{k=1}^{m} j_k - 1\right)! \text{ if all } j_i \geqq 1. \end{cases}$$

Using the results of section **5**, it is possible to sum the terms of Φ for a given value of $N = \sum_{k=1}^{m} j_k$. In fact, these terms in Φ give, according to (5. 2), if $N \geqq m$,

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{m} j_i = N \\ j_i \geqq 1}} \frac{N!}{j_1! \cdots j_m!} x_1^{j_1} \cdots x_m^{j_m} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\xi_p \in \Xi_m \\ p=1,\ldots,m}} (-1)^{m-p} \xi_p^N.$$

Further, the sum at the right hand side of this equality is zero for $N < m$. Hence, we may write

$$\Phi(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{\xi_p \in \Xi_m \\ p=1,\ldots,m}} (-1)^{m-p} \xi_p^N$$

$$(6.4) \qquad = -\sum_{\substack{\xi_p \in \Xi_m \\ p=1,\ldots,m}} (-1)^{m-p} \ln(1-\xi_p).$$

7. Recursion formulae I. We consider here the case $m = 1$, i. e. recursion formulae for the γ_n and, by the way, for the other quantities occurring in the difference scheme in section **3**. Putting

$$\alpha_{0,0} = 1, \quad \alpha_{n,0} = (n-1)!, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

and defining as above in (4. 1)

$$(7.1) \qquad \alpha_{i,k+1} = \alpha_{i+1,k} - \alpha_{i,k}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

we have seen that

$$F(x, y) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{i,k}}{i!\,k!} x^i y^k = e^{-y}\{1 - \ln(1-x-y)\}$$

(compare Lemma 3 and the results of section **6**). Hence

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^{-y}\{1 - \ln(1-x-y)\} + \frac{e^{-y}}{(1-x-y)}$$

$$= -F + \frac{e^{-y}}{1-x-y}$$

so that (compare (7. 1))

$$F + \frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{i,k} + \alpha_{i,k+1}}{i!\,k!} x^i y^k$$

$$= \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{i+1,k}}{i!\,k!} x^i y^k = \frac{e^{-y}}{1-x-y},$$

i. e.

$$(1-x-y) \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{i+1,k}}{i!\,k!} x^i y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} y^k.$$

It follows, that

$$\frac{\alpha_{1,k}}{0!\,k!} - \frac{\alpha_{1,k-1}}{0!\,(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad k \geqq 1$$

and, for $i > 0$

$$\frac{\alpha_{i+1,k}}{i!\,k!} - \frac{\alpha_{i,k}}{(i-1)!\,k!} - \frac{\alpha_{i+1,k-1}}{i!\,(k-1)!} = 0, \quad k \geqq 1,$$

$$\frac{\alpha_{i+1,0}}{i!\,0!} - \frac{\alpha_{i,0}}{(i-1)!\,0!} = 0, \quad i \geqq 1.$$

Therefore,

$$(7.2) \qquad \alpha_{1,k} - k\alpha_{1,k-1} = (-1)^k, \quad k \geqq 1,$$

$$(7.3) \qquad \alpha_{i+1,k} = i\alpha_{i,k} + k\alpha_{i+1,k-1}, \quad k \geqq 1, \; i \geqq 1,$$

$$(7.4) \qquad \alpha_{i+1,0} = i\alpha_{i,0}, \quad i \geqq 1.$$

As

$$\alpha_{1,k} = \gamma_k + \gamma_{k+1},$$

(7. 2) yields immediately

$$\gamma_{k+1} = (k-1)\,\gamma_k + k\gamma_{k-1} + (-1)^k. \tag{7. 5}$$

Further (7. 2) is itself a remarkable, though probably known, recursion formula for the n-th differences of $n!$ in the series $0!, 1!, 2!, \ldots$, viz. in the notation introduced in the Remark of section **3**

$$\beta_k = k\beta_{k-1} + (-1)^k,\ k \geqq 1. \tag{7. 6}$$

Another recursion formula for these differences is given by

$$\beta_{k+1} = k(\beta_k + \beta_{k-1}),\ k \geqq 1, \tag{7. 7}$$

which is easily obtained from (7. 6). From (7. 3) we obtain further a recursion formula for the other "columns" in the difference scheme of section **3**, viz.

$$\alpha_{i,k+1} = (i+k-1)\,\alpha_{i,k} + k\alpha_{i,k-1},\ \ i \geqq 1,\ \ k \geqq 1. \tag{7. 8}$$

A similar formula for the rows, which also follows from (7. 3), is, besides the result (7. 4) ($k = 0$), which is trivial,

$$\alpha_{i+1,k} = (i+k+1)\,\alpha_{i,k} - (i-1)\,\alpha_{i-1,k},\ \ i \geqq 2,\ \ k \geqq 0, \tag{7. 9}$$

$$\alpha_{2,k} = (k+2)\,\alpha_{1,k} + (-1)^{k+1},\ \ k \geqq 0. \tag{7. 10}$$

8. Recursion formulae II. Next we consider recursion formulae for the $\gamma_{n_1,\ldots,n_m}$, $m > 1$. Let, first, $m > 2$. We split the generating function of the $\gamma_{n_1,\ldots,n_m}$ in three parts (compare section **3**),

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3. \tag{8. 1}$$

For convenience we put

$$\Theta(i_1,\ldots,i_p) = x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_p},\ 1 \leqq i_1 < i_2 \leqq \cdots < i_p \leqq m,\ p = 1,\ldots,m. \tag{8. 2}$$

Then

$$\Phi_1 = -e^{-\xi_n} \sum_{\substack{i_j=1,\ldots,m-2\\ q=1,\ldots,m-2}} (-1)^{m-q}[\ln(1-\Theta(i_1,\ldots,i_q,m-1,m)) - \ln(1-\Theta(i_1,\ldots,i_q))], \tag{8. 3}$$

$$\Phi_2 = e^{-\xi_n} \sum_{\substack{i_j=1,\ldots,m-2\\ q=1,\ldots,m-2}} (-1)^{m-q}[\ln(1-\Theta(i_1,\ldots,i_q,m-1)) - \ln(1-\Theta(i_1,\ldots,i_q))], \tag{8. 4}$$

$$\Phi_3 = e^{-\xi_n} \sum_{\substack{i_j=1,\ldots,m-2\\ q=1,\ldots,m-2}} (-1)^{m-q}[\ln(1-\Theta(i_1,\ldots,i_q,m)) - \ln(1-\Theta(i_1,\ldots,i_q))]. \tag{8. 5}$$

Now each term in Φ_1 contains x_{m-1} as well as x_m only as their sum $x_{m-1} + x_m$. Hence it is easy to see that

$$\left[\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_m}}{\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_m^{n_m}}\Phi_1\right]_{\substack{x_i=0\\ i=1,\ldots,m}} = \gamma_{n_1,\ldots,n_{m-2},n_{m-1}+n_m}.$$

Further each single differentiation of Φ_2 and Φ_3 with respect to x_m and x_{m-1} respectively yields in the result a factor -1.

Hence we obtain

$$\left[\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_m}}{\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_m^{n_m}}\Phi_2\right]_{\substack{x_i=0\\ i=1,\ldots,m}} = -(-1)^{n_m}\gamma_{n_1,\ldots,n_{m-1}}$$

and

$$\left[\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_m}}{\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_m^{n_m}}\Phi_3\right]_{\substack{x_i=0\\ i=1,\ldots,m}} = -(-1)^{n_m-1}\gamma_{n_1,\ldots,n_{m-2},n_m}.$$

The final result is obviously

$$(8.6)\quad \gamma_{n_1,\ldots,n_m} = \gamma_{n_1,\ldots,n_{m-2},n_{m-1}+n_m} - (-1)^{n_m}\gamma_{n_1,\ldots,n_{m-1}} - (-1)^{n_{m-1}}\gamma_{n_1,\ldots,n_{m-2},n_m}.$$

Here the indices n_{m-1}, n_m play a special part. From the symmetry in the indices we see that this pair can be replaced by any other pair of indices. Hence we have expressed the $\gamma_{n_1,\ldots,n_m}$ in corresponding quantities with a value of m which is diminished by 1.

Proceding analogously for $m = 2$, one obtains a result which slightly differs from the foregoing, viz.

$$(8.7)\qquad \gamma_{i,j} = \gamma_{i+j} - (-1)^i\gamma_j - (-1)^j\gamma_i + (-1)^{i+j}.$$

Introducing the new quantities

$$(8.8)\qquad \gamma^*_{n_1,\ldots,n_m} = (-1)^{n_1+\cdots+n_m}\gamma_{n_1,\ldots,n_m}$$

the foregoing results (8. 6) and (8. 7) may be brought into a more suitable form, viz.

$$(8.9)\qquad \gamma^*_{n_1,\ldots,n_m} = \gamma^*_{n_1,\ldots,n_{m-2},n_{m-1}+n_m} - \gamma^*_{n_1,\ldots,n_{m-1}} - \gamma^*_{n_1,\ldots,n_{m-2},n_m}$$

and

$$(8.10)\qquad \gamma^*_{i,j} = \gamma^*_{i+j} - \gamma^*_i - \gamma^*_j + 1.$$

9. Expression of the $\gamma_{n_1,\ldots,n_m}$ in the β_i. Using (8. 9) and (8. 10) we can reduce successively the number of indices in the γ's. It is hence obvious that $\gamma^*_{n_1,\ldots,n_m}$ can be expressed as a sum of γ_i's, each multiplied by a suitable factor. We will here give an expression in the quantities β_i. Actually, the expression becomes more tractable if we use the quantities

$$(9.1)\qquad \beta^*_n = (-1)^n\beta_n.$$

Starting from

$$\gamma_{n+1} + \gamma_n = \beta_n, \quad n \geqq 0,$$

we obtain

$$\gamma^*_n - \gamma^*_{n+1} = \beta^*_n.$$

Adding these equations from $n = 0$ up to $n = k-1$, we get

$$\gamma^*_0 - \gamma^*_k = \sum_{n=0}^{k-1}\beta^*_n$$

and hence, as $\gamma^*_0 = 1$,

$$(9.2)\qquad \gamma^*_k = 1 - \sum_{n=0}^{k-1}\beta^*_n = 1 + B_k,$$

where

$$(9.3)\qquad B_k = -\sum_{n=0}^{k-1}\beta^*_n,\ k \geqq 1,\ B_0 = 0.$$

We observe that

$$(9.4)\qquad B_{k+1} - B_k = -\beta^*_k = (-1)^{k+1}\beta_k,\ k \geqq 0,$$

so that (compare section **3**)

$B_0 = 0,\ B_1 = -1,\ B_2 = -1,\ B_3 = -2,\ B_4 = 0,\ B_5 = -9,\ B_6 = 35,\ B_7 = -230$ etc.

Hence, in view of (8. 10)

$$\gamma^*_{i,j} = B_{i+j} - B_i - B_j. \tag{9. 5}$$

This is now generalized to an expression of $\gamma_{n_1,\ldots,n_m}$ in the B_k's, which is, consequently, essentially an expression in the β_k's, the B_k being only introduced so as to exhibit more clearly the symmetry of the expression with respect to $n_1, \ldots, n_m$. From (8. 9) together with (9. 5) we will obtain the result

$$\gamma^*_{n_1,\ldots,n_m} = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m \\ p=1,\ldots,m}} (-1)^{m-p} B_{n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}}. \tag{9. 6}$$

In fact, we will prove a more general result, viz.

$$\gamma^*_{n_1,\ldots,n_m} = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq q \\ p=1,\ldots,q}} (-1)^{q-p} \gamma^*_{n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}, n_{q+1},\ldots,n_m}. \tag{9. 7}$$

According to (8. 9) this formula is true for $q = 2$ and in this case the sum of the coefficients of the γ's at the right hand side is -1. We assume the validity of (9. 7) for any value of $q \geqq 2$ and further that the sum of the coefficients is then $(-1)^{q-1}$. It will be proved that (9. 7) remains true if q is replaced by $q+1$ and that the sum of the coefficients then becomes $(-1)^q$. Applying (8. 9) on the indices $n_{i_1} + \cdots + n_{i_p}$ and n_{q+1} in any of the terms in (9. 7) we obtain

$$\begin{aligned}\gamma^*_{n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}, n_{q+1},\ldots,n_m} &= \gamma^*_{n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}+n_{q+1}, n_{q+2},\ldots,n_m} \\ &\quad - \gamma^*_{n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}, n_{q+2},\ldots,n_m} - \gamma^*_{n_{q+1}, n_{q+2},\ldots,n_m}.\end{aligned}$$

Hence in the final result, obtained by multiplication with $(-1)^{q-p}$ and addition, the term

$$\gamma_{n_{q+1}, n_{q+2},\ldots,n_m}$$

gets, according to the second half of our induction hypothesis, the coefficient $-(-1)^{q-1} = (-1)^q$. This result is therefore

$$\begin{aligned}\gamma^*_{n_1,\ldots,n_m} &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq q \\ p=1,\ldots,q}} (-1)^{q-p} \{\gamma^*_{n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}+n_{q+1}, n_{q+2},\ldots,n_m} \\ &\qquad - \gamma^*_{n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}, n_{q+2},\ldots,n_m}\} + (-1)^q \gamma^*_{n_{q+1}, n_{q+2},\ldots,n_m} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq q+1 \\ p=1,\ldots,q+1}} (-1)^{q+1-p} \gamma^*_{n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}, n_{q+2},\ldots,n_m},\end{aligned}$$

which is identical with (9. 7) if in (9. 7) q is replaced by $q+1$. Further the total sum of the coefficients is now $(-1)^q$, viz. equal to the final coefficient of $\gamma^*_{n_{q+1},\ldots,n_m}$, as the other coefficients cancel. The result of the final reduction is hence given by (9. 6).

10. Remarks on known results. We give here a simple proof of the main results obtained by P. Armsen and H. Rohrbach [1] and by P. Armsen [2]. Though it is obvious that a treatment similar to that given in the present paper of the problems discussed by these authors is possible, it will be stated below that their main results follow from those given here without much effort.

First we recall the problems in [1] and [2]. Only ordinary permutations are discussed. If $P_n = p_1 p_2 \ldots p_n$ is a permutation of the numbers $1, 2, \ldots, n$ the following types of sequences are defined.

(i) The pair p_α, p_β forms a sequence if

$$\beta = \alpha + 1 \text{ and } p_\beta = p_\alpha + 1 \qquad (1 \leqq \alpha \leqq n-1).$$

(ii) The pair p_α, p_β forms a cycle sequence if

$$\beta = \alpha + 1 \text{ and } p_\beta \equiv p_\alpha + 1 \pmod{n} \qquad (1 \leqq \alpha \leqq n-1).$$

(iii) The pair p_α, p_β forms a circle sequence if

$$\beta \equiv \alpha + 1 \pmod{n} \text{ and } p_\beta = p_\alpha + 1 \qquad (1 \leqq \alpha \leqq n).$$

(iv) The pair p_α, p_β forms a total sequence if

$$\beta \equiv (\alpha + 1) \bmod n \text{ and } p_\beta \equiv p_\alpha + 1 \pmod{n} \qquad (1 \leqq \alpha \leqq n).$$

The numbers of permutations with exactly

k sequences is denoted by $S_k(n)$,
k cyclic sequences is denoted by $Z_k(n)$,
k circle sequences in denoted by $K_k(n)$,
k total sequences is denoted by $T_k(n)$.

As $K_k(n) = Z_k(n)$ only one of them, viz. $Z_k(n)$, will be considered further. We will use here the notation

$$\sigma_n = S_0(n), \ \zeta_n = Z_0(n), \ \tau_n = T_0(n). \tag{10. 1}$$

It can easily be verified directly, as above in section **1**, that

$$S_k(n) = \binom{n-1}{k} \sigma_{n-k}, \tag{10. 2}$$

$$Z_k(n) = \binom{n}{k} \zeta_{n-k}, \tag{10. 3}$$

$$T_k(n) = n \binom{n}{k} \tau_{n-k}, \tag{10. 4}$$

hence we have only to express σ_n, ζ_n and τ_n in the quantities γ defined in the present paper. This can be done as follows.

A. σ_n. Here we prove

$$\sigma_n = \gamma_{n,1} + \gamma_{n-1,1}. \tag{10. 5}$$

In fact, we can obtain all permutations of $1, 2, \ldots, n$ without sequences as follows:

(i) We consider the cyclic permutations without cyclic sequences of the elements of the two cyclicly ordered sets $\{1, 2, \ldots, n\}$ and $\{1'\}$. It is obvious that the pertaining ordinary permutations are simply the segments of "length" n following the element $1'$. The total number of permutations which are obtained in this way is hence $\gamma_{n,1}$.

(ii) We have still to add those permutations which contain the sequence $n, 1$. Their number is obtained in the same way as above by replacing first the pair $n, 1$ in $\{1, 2, \ldots, n\}$ by a single element $1''$ and considering the number of cyclic permutations without cyclic sequences of the two sets $\{1'', 2, \ldots, n-1\}$ and $\{1'\}$. Considering the segments of "length" $n-1$ which follow $1'$ in these cyclic permutations and replacing in them $1''$ by the pair $n, 1$ (in this order) yields the remaining permutations of n elements without sequences. Their number is obviously $\gamma_{n-1,1}$.

In this way one obtains, as can easily be verified, all permutations without sequences and each only once, so that (10. 5) is actually true.

Using (8. 8), (9. 4) and (9. 5) it is seen that

$$\gamma_{n,1} = (-1)^{n+1}(B_{n+1} - B_n - B_1) = \beta_n + (-1)^{n+1} \tag{10. 6}$$

and consequently

$$\sigma_n = \beta_n + \beta_{n-1} = \alpha_{2,n-1} \tag{10. 7}$$

so that $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ are given by the third "column" in the difference scheme in section **3**.

B. ζ_n. A similar discussion as under A yields (compare 10. 6)

$$\zeta_n = \gamma_{n,1} = \beta_n - (-1)^n \tag{10. 8}$$

i. e.

$$\zeta_1 = 1,\ \zeta_2 = 0,\ \zeta_3 = 3,\ \zeta_4 = 8,\ \zeta_5 = 45,\ \zeta_6 = 264 \text{ etc.}$$

C. τ_n. It is clear that

$$\tau_n = n\gamma_n \tag{10. 9}$$

i. e.

$$\tau_1 = 0,\ \tau_2 = 0,\ \tau_3 = 3,\ \tau_4 = 4,\ \tau_5 = 40,\ \tau_6 = 216 \text{ etc.}$$

It is a matter of simple calculations to obtain the following generating functions for the above quantities. If we put $\zeta_0 = \tau_0 = \sigma_0 = 0$ we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n}{n!} y^n = \frac{e^{-y}}{(1-y)^2}, \tag{10. 10}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta_n}{n!} y^n = \frac{y \cdot e^{-y}}{1-y}, \tag{10. 11}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_n}{n!} y^n = e^{-y}\left\{(1-y)\ln(1-y) + y + \frac{y^2}{(1-y)^2}\right\}. \tag{10. 12}$$

It remains to consider the determination of the number of permutations with a given number of d-progressions. A d-progression in a permutation $p_1 p_2 \cdots p_n$ of the numbers $1, 2, \ldots, n$ is a pair $p_\nu, p_{\nu+1}$, so that $p_{\nu+1} - p_\nu = d$; $d = 1, 2, \ldots, n-1$. This problem has also been solved in [2]. We denote the number of permutations with k of these α-progressions by ${}_dP_k(n)$ and notice first, that it is sufficient to determine

$$\pi_{d,n} = {}_dP_0(n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10. 13}$$

for all admitted values of d and n. In fact by a consideration similar to that given in section **1** we obtain

$${}_dP_k(n) = \binom{n-d}{k} \pi_{d,n-k}. \tag{10. 14}$$

Further, the $\pi_{d,n}$ can be expressed in the quantities $\gamma_{n_1,\ldots,n_m}$, introduced in the present paper, as follows. Let

$$n = \mu d + \nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, d.$$

We consider the subsets of the set of integers given by

$$\begin{array}{l} 1,\ 1+d, \ldots, 1+\mu d, \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu,\ \nu+d, \ldots, \nu+\mu d, \\ \nu+1,\ \nu+1+d, \ldots, \nu+1+(\mu-1)d, \\ \cdot \\ \cdot \\ d,\ 2d, \ldots, \mu d. \end{array}$$

The first ν of them contain $\mu + 1$ elements, the remaining $d - \nu$ contain μ elements. An argument similar to that given above for the calculation of σ_n now yields immediately

$$\pi_{d,n} = \Sigma\, \gamma_{k_1,\ldots,k_d,1} \tag{10. 15}$$

the sum being extended over the values

$$k_1, \ldots, k_\nu = \mu + 1 \text{ and } \mu;$$
$$k_{\nu+1}, \ldots, k_d = \mu \text{ and } \mu - 1.$$

This result, however, is of little use for the calculation of $\pi_{d,n}$. We notice that for $d = 1$ we have the special case $\sigma_n = \pi_{1,n}$. In fact in this case $\mu = n - 1$, $\nu = 1$ so that $\pi_{1,n} = \gamma_{n,1} + \gamma_{n-1,1}$. Further, if $n = d$ we have obviously

$$\pi_{n,n} = n! \tag{10.16}$$

which agrees with (10. 15) for in this case $\mu = 0$ and hence

$$\pi_{n,n} = \gamma_{1,1,\ldots,1},$$

with $n + 1$ indices. As the number of cyclic permutations of $n + 1$ elements is $n!$ it is seen that $\gamma_{1,1,\ldots,1}$ (with $n + 1$ indices) equals $n!$.

Finally, we have, for $d = n - 1$, $\mu = 1$, $\nu = 1$. Hence, adding for convenience the total number of indices in the γ's as an upper index

$$\pi_{n-1,n} = \gamma^n_{2,1,\ldots,1} + \gamma^n_{1,1,\ldots,1}.$$

According to (8. 6)

$$\gamma^{n+1}_{1,1,\ldots,1} = \gamma^n_{2,1,\ldots,1} + 2\gamma^n_{1,1,\ldots,1}$$

and therefore

$$\pi_{n,n} - \pi_{n-1,n-1} = \pi_{n-1,n}.$$

This proves that

$$\pi_{n,n} = \alpha_{n+1,0}, \quad \pi_{n,n+1} = \alpha_{n+1,1} \tag{10.17}$$

(compare the difference scheme and the definition of $\alpha_{i,k}$ in section **3**). We will, however, prove more generally

$$\pi_{d,n} = \alpha_{d+1,n-d} \tag{10.18}$$

which is a completely satisfactory result, agreeing with [2]. To prove (10. 18), it is sufficient to show that the $\pi_{d,n}$ suffice the recursion formula corresponding to that for the $\alpha_{i,k}$, i. e. (compare (7. 8))

$$\pi_{d,n+1} = n\pi_{d,n} + (n - d)\,\pi_{d,n-1}, \quad d \geqq 1,\ n \geqq d - 1. \tag{10.19}$$

Consider, for this purpose, a permutation of $1, 2, \ldots, n$ without d-progression. Without changing the order of its elements we can add the number $n + 1$ at n different places so as to obtain a permutation of $1, 2, \ldots, n + 1$ without d-progression. The only excluded place is to the right of $n + 1 - d$. However, we can also obtain a permutation of $1, 2, \ldots, n + 1$ without d-progression by considering a permutation of $1, 2, \ldots, n$ with one d-progression and adding $n + 1$ between the elements which form this d-progression. It is easily seen, that each permutation of $1, 2, \ldots, n + 1$ without d-progression is obtained once in this way. Hence

$$\pi_{d,n+1} = n\pi_{d,n} + {}_dP_1(n).$$

But according to (10. 14)

$${}_dP_1(n) = (n - d)\,\pi_{d,n-1}$$

so that (10. 19) is actually true.

For the sake of completeness we notice that if $E_k(n)$ is the number of permutations with k "Eigenstellen" in the sense of [2] and if $E_0(n) = \varepsilon_n$, we get, if we define $\varepsilon_0 = 1$,

$$E_k(n) = \binom{n}{k} \varepsilon_{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

As

$$n! = \sum_{k=0}^{n} E_k(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon_k,$$

we obtain for the ε_k $(k = 1, 2, \ldots)$ a system of equations similar to the set (1. 12) for $m = 1$. The solution is given by

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k!, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Consequently we see that

$$\varepsilon_n = \beta_n.$$

References.

[1] *P. Armsen* u. *H. Rohrbach*, Sequenzen in Permutationen, Archiv der Mathematik **1** (1948), 106—112.

[2] *P. Armsen*, Verallgemeinerungen von Sequenzen in Permutationen, Journal für reine und angewandte Mathematik **189** (1952), 77—99.

Eingegangen 31. Januar 1956.

Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. III *).

Von *K. Bögel* in Ilmenau.

Sechster Abschnitt.

Differenzierbarkeit und Nichtdifferenzierbarkeit.

Einleitung.

Soll eine stetige Funktion $f(x)$ noch gewissen Zusatzbedingungen genügen, so werden die Vorgaben a) bis d) zu ihrer Konstruktion, die wir in § 8 des vorhergehenden Abschnittes aufgestellt haben, in ihrer Allgemeinheit mehr oder weniger eingeschränkt werden müssen.

Wir untersuchen diese Einschränkungen für zwei extremale Fälle: daß $f(x)$ überall in $\bar{J}$ und daß $f(x)$ nirgends in $\bar{J}$ differenzierbar ist.

In § 1 zeigen wir: Ist $f(x)$ überall in $\bar{J}$ differenzierbar und ist $F^*_{n\geqq 1}$ ein Summand der kanonischen Darstellung (110c) von $S(f, \bar{J})$, so enthält die Menge $F^*_n \cap J$ keinen isolierten Punkt. Die einzigen Punkte von F^*_n, die isoliert sein können, sind daher die beiden Randpunkte von $\bar{J}$. Da F^*_n außerdem auf $\bar{J}$ vollkommen abgeschlossen ist, so ist die Menge

$$P^*_n = (F^*_n \cap J) \cup [(F^*_n)' \cap G(J)] \tag{197}$$

perfekt. Hieraus ergibt sich aber, daß jede der Mengen $F^*_{n\geqq 1}$, und damit auch die Menge $S(F, \bar{J})$ die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Die Allgemeinheit der in § 8 des vorhergehenden Abschnittes genannten Vorgaben a) und b) muß daher zur Konstruktion überall in $\bar{J}$ differenzierbarer Funktionen erheblich eingeschränkt werden: die Vorgabe a) durch die Zusatzforderung, daß F die Mächtigkeit des Kontinuums habe, die Vorgabe b) durch die Zusatzforderung, daß jede Menge

$$P_n = (F_n \cap J) \cup [F'_n \cap G(\bar{J})], \quad n \geqq 1, \tag{197a}$$

perfekt sei. Diese Zusatzforderungen sind für die Konstruktion überall differenzierbarer Funktionen notwendig.

Notwendige Zusatzforderungen für die Konstruktion von in $\bar{J}$ nirgends differenzierbaren stetigen Funktionen ergeben sich aus § 3 im vierten Abschnitt. Die Vorgabe a) ist dann verschärft durch die Forderung, daß F eine auf $\bar{J}$ überall dichte Menge erster Kategorie sei, die Vorgabe b) durch die Forderung, daß jede der Mengen F_n nirgends dicht auf $\bar{J}$ sei. Natürlich genügen diese notwendigen Zusatzforderungen keineswegs, um den Erhalt einer nirgends differenzierbaren Funktion zu garantieren. Vielmehr müssen wir auch noch die Allgemeinheit der Vorgaben c) und d) für die Einheitskonstruktion ein-

*) Teil I, II dieser Abhandlung sind erschienen in diesem Journal **196** (1956), 1—33, 137—154. In Teil II sind auf S. 154 die Seiten 4 und 5 miteinander zu vertauschen.

schränken. Diese Einschränkung nehmen wir in § 2 vor und erhalten zunächst Funktionen, die in den Restpunkten nicht differenzierbar sind.

Bestehen dabei alle Mengen $F_n(f, \bar{J})$ nur aus endlich vielen Punkten, so ist $f(x)$ nirgends differenzierbar. Bestehen aber die Mengen $F_n(f, \bar{J})$ von einem bestimmten Index $N \geqq 1$ an aus unendlich vielen Punkten, so müssen noch Forderungen an die Verteilung der Punkte von $F_{n \geqq N}$ in $\bar{J}$ gemacht werden, die — grob gesagt — verhüten, daß die Menge F auf $\bar{J}$ allzu dicht ist. Diese Forderungen geben wir in § 3.

§ 1. Die überall differenzierbaren Funktionen.

Satz 76. *Es sei $f(x)$ in $\bar{J} = [a, b]$ definiert, und es sei die alternierende kanonische Summendarstellung* (110c) *der Menge $S(f, \bar{J})$ gegeben. Es existiere ein Wert $N \geqq 1$, für welchen die Menge $J \cap F_N^*(f, \bar{J})$ wenigstens einen isolierten Punkt x_j besitze. Dann ist $f(x)$ in x_j nicht differenzierbar.*

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$x_j \bar{\in} J \cap F_{N-1}^*(f, \bar{J}) \tag{198}$$

annehmen. Ist nämlich x_j in F_n^* als isolierter Punkt enthalten, und ist außerdem $x_j \in F_{n-r}^*$, so ist x_j in F_{n-r}^* wegen $F_n^* \geq F_{n-r}^*$ a fortiori isoliert.

Wir verwenden die Bezeichnung (110d). Dann ist x_j erstens Punkt einer Komponente K von $B_{N-1}^*(f, J)$, zweitens gemeinsamer Randpunkt zweier Komponenten (x_i, x_j) und (x_j, x_k) von $B_N^*(f, J)$, die beide in K liegen. Außerdem ist

$$x_j \in H_1^-(f, K), \quad \text{wenn } N \text{ ungerade,}$$
$$x_j \in H_1^+(f, K), \quad \text{wenn } N \text{ gerade ist.}$$

Es genügt, den ersten Fall zu betrachten; es sei also N ungerade. In der natürlichen Approximation von $f(x)$ erhalten wir dann

$$s_N^*(x) = f(x_j) + (x - x_j)\, q(f; x_i, x_j), \quad \text{wenn } x \in [x_i, x_j] \tag{199a}$$
$$s_N^*(x) = f(x_j) + (x - x_j)\, q(f; x_j, x_k), \quad \text{wenn } x \in [x_j, x_k], \tag{199b}$$

wobei

$$q(f; x_i, x_j) - q(f; x_j, x_k) = d > 0 \tag{199c}$$

ist. Die Funktion $s_N^*(x)$ besitzt in x_j nach (199a) bis (199c) eine linke Derivierte $D^- s_N^*(x_j) = q(f; x_i, x_j) = q_1$ und eine rechte Derivierte $D^+ s_N^*(x_j) = q(f; x_j, x_k) = q_2$, die sich um $q_1 - q_2 = d > 0$ unterscheiden.

Nun ist aber einerseits nach (124a) definitionsgemäß

$$f(x_j) = s_N^*(x_j), \tag{200a}$$

nach (136a) andrerseits

$$f(x) \leqq s_N^*(x) \text{ für } x \neq x_j; \tag{200b}$$

hieraus und aus dem oben Gesagten ergibt sich

$$\bar{D}^- f(x_j) \geqq q_1; \quad \bar{D}^+ f(x_j) \leqq q_2,$$

also

$$\bar{D}^- f(x_j) - \bar{D}^+ f(x_j) \geqq q_1 - q_2 = d > 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar

Satz 76a. *Ist $f(x)$ überall in $\bar{J}$ differenzierbar, so ist jede der durch* (197) *definierten Mengen $P^*_{n\geq 1}$ perfekt.*

Damit ist die Notwendigkeit der in der Einleitung genannten Zusatzforderungen zu den Vorgaben a) und b) bei der Konstruktion überall differenzierbarer Funktionen erwiesen.

Ist nun zur Konstruktion einer überall in J differenzierbaren Funktion $f(x)$ eine Folge $\{F_n\}$ vorgegeben, für welche die nach (197a) zugehörige Folge $\{P_n\}$ aus perfekten Mengen besteht, so sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden: den ersten erhalten wir, wenn jede der Mengen P_n aus punktfremden Kontinuen und deren Häufungspunkten besteht, den zweiten, wenn jede der Mengen P_n nirgends dicht auf $\bar{J}$ ist. Im ersten Falle erhalten wir abschnittsweise reguläre, im zweiten Falle überall doppelwendige Funktionen. Der interessantere Fall ist der zweite; liefert er doch Funktionen, die überall in $\bar{J}$ einerseits differenzierbar, andererseits von der Ordnung Unendlich sind. Hier sei nur noch bemerkt, daß zu diesen differenzierbaren Funktionen der Ordnung Unendlich die sog. Koepckeschen Funktionen gehören, die überall differenzierbar sind und überall dicht Maxima und Minima besitzen[1]).

§ 2. Nichtdifferenzierbarkeit einer nirgends linearen Funktion in einem Restpunkt.

Unser Ziel ist es, in $\bar{J}$ möglichst allgemeine nirgends differenzierbare Funktionen $f(x)$ aufzustellen. Wir lassen daher von dieser Stelle an alle Funktionen außer acht, welche lineare Teilstücke enthalten. Es ist also sowohl $\Lambda(f, J)$ als auch $\lambda(f, \bar{J})$ leer, so daß es nach Satz 39 keine nicht erreichbaren Hauptpunkte gibt. Damit sind die beiden Mengen $S(f, \bar{J})$ und $H(f, J)$ identisch. Außerdem verschärft sich die Abschätzung (94) des Satzes 37 zu der Identität

$$E_p(f, J) = R(f, J). \tag{201}$$

Legen wir die alternierende kanonische Summendarstellung von $S(f, \bar{J})$ zugrunde mit den Bezeichnungen (110a) bis (110d), so ist damit jeder Restpunkt x_r der Durchschnitt einer Intervallschachtelung

$$x_r = \bigcap_{n=0}^{\infty} K(n, x_r), \tag{202}$$

wobei $K(n, x_r) = (a_n, b_n)$ eine durch x_r bestimmte Komponente von $B^*_n(f, J)$ ist.

Der alternierende natürliche Summand $f^*_{n+1}(x)$ ist nach § 7 des vorhergehenden Abschnittes im Segment $\bar{K}(n, x_r)$ entweder eine dort linear-konkave oder eine dort linear-konvexe Grundfunktion, deren absoluter Betrag in $K(n, x_r)$ einen Maximalwert $m(n, x_r) > 0$ besitzt. Mit diesen Bezeichnungen formulieren wir

[1]) Die *Koepcke*sche Konstruktion ist in drei Arbeiten enthalten: Math. Ann. **29** (1887), p. 123—140; Math. Ann. **34** (1889), p. 161—171; Math. Ann. **35** (1890), p. 104—109. Die ersten beiden sind fehlerhaft, und da die dritte weithin Bezug auf die ersten beiden nimmt, ist auch sie unangenehm zu lesen, was schon E. Pascal in seinen Esercizii critici di calcolo diff. e integr. (Mailand 1909), S. 98 bemerkt hat. In *E. W. Hobson*, Theory of functions of a real variable, Vol. II, 2. Aufl., Cambridge 1926, p. 412—421 findet sich eine etwas übersichtlichere, allerdings auch nicht ganz einwandfreie Darstellung.

Satz 77. *Ist $f(x)$ in J definiert und stetig, ohne lineare Teilstücke, und ist $x_r \in R(f, J)$, ist außerdem*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{m(n, x_r)}{b_n - a_n} = v(x_r) > 0, \tag{203}$$

so ist $f(x)$ in x_r nicht differenzierbar.

Dem Beweis dieses Satzes schicken wir zwei einfache Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Im Segment $\overline{K}_n = [a_n, b_n]$ sei $g(x)$ eine Grundfunktion, die entweder nichtnegativ oder nichtpositiv sei. Ihr absoluter Betrag habe in $\overline{K}_n$ einen Maximalwert m_n, und es sei $c_n \in K_n$ ein Punkt, in welchem $|f(c_n)| = m$ sei*[2]).

Ist dann $x \neq c_n$ ein stetiger Punkt in K_n, so gilt mindestens eine der drei Abschätzungen

$$|u(g; b_n, a_n; x)| > \frac{m}{b_n - a_n} \tag{204a}$$

$$|u(g; b_n, c_n; x)| > \frac{m}{b_n - a_n} \tag{204b}$$

$$|u(g; c_n, a_n; x)| > \frac{m}{b_n - a_n} \tag{204c}$$

Beweis. Es genügt, den Beweis für eine nichtnegative Funktion $g(x)$ zu führen. Wir führen ihn an Hand von Fig. 1.

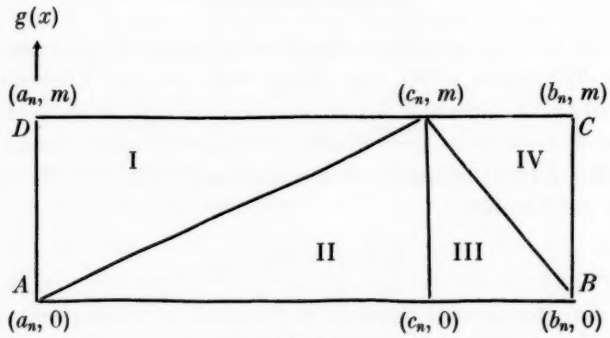


Fig. 1.

Stellen wir die Funktion in der üblichen Weise graphisch dar, so liegen alle *Punkte* $P(x, g(x))$ in dem abgeschlossenen Rechteck $ABCD$, das wir in die vier abgeschlossenen Dreiecke I, II, III, IV der Figur zerlegen.

Liegt der Punkt P in I, so ist[3])

$$q(g; a_n, x) \geqq q(g; a_n, c_n) = \frac{m}{c_n - a_n} > \frac{m}{b_n - a_n} \tag{205a}$$

und

$$q(g; b_n, x) \leqq 0; \tag{205b}$$

liegt P in II, so gilt wieder (205b) und außerdem

$$q(g; c_n, x) \geqq q(g; a_n, c) > \frac{m}{b_n - a_n} \tag{205c}$$

[2]) Die Funktion $g(x)$ kann dabei (sogar überall) unstetig sein.

[3]) Vgl. die Definitionsgleichungen (31) und (39).

Liegt P in III, so ist

(205d) $$q(g;\, a_n,\, x) \geqq 0;$$

(205e) $$q(g;\, c_n,\, x) \leqq q(g;\, c,\, b_n) = -\frac{m}{b_n - c_n} < -\frac{m}{b_n - a_n};$$

liegt P in IV, so gilt wieder (205d) und außerdem

(205f) $$q(g;\, b_n,\, x) \leqq q(g;\, c_n,\, b_n) < -\frac{m}{b_n - a_n}.$$

Aus (205a) und (205b) erhalten wir in I, aus (205d) und (205f) in IV die Abschätzung (204a), aus (205b) und (205c) in II die Abschätzung (204b), aus (205d) und (205e) in III die Abschätzung (204c), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Es sei $g(x)$ wie in Hilfssatz 1 definiert, und es sei $L(x)$ eine in $\overline{K}_n$ lineare Funktion. Dann gilt die Behauptung des Hilfssatzes 1 auch für die Funktion*

$$f(x) = g(x) + L(x).$$

Beweis. Sind x_1, x_2, x_3 drei beliebige Punkte in K, so ist

$$u(L;\, x_1,\, x_2;\, x_3) = 0.$$

Hieraus und aus (41e) folgt

$$u(f;\, x_1,\, x_2;\, x_3) = u(g;\, x_1,\, x_2;\, x_3),$$

womit alles bewiesen ist.

Bemerkung. Die Bedingungen, denen $f(x)$ im Hilfssatz 2 unterworfen ist, sind offensichtlich identisch mit den folgenden Bedingungen:

(206) $$f(a_n) = L(a_n),\ f(b_n) = L(b_n),$$

und — wenn $g(x)$ nichtnegativ ist —

(207a) $$L(x) \leqq f(x) \leqq L(x) + m, \text{ speziell } f(c) = L(c_n) + m;$$

ist aber $g(x)$ nichtpositiv, so

(207b) $$L(x) \geqq f(x) \geqq L(x) - m, \text{ speziell } f(c) = L(c_n) - m.$$

Beweis des Satzes 77. Ist $f(x)$ in x_r differenzierbar, so gibt es bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x_r mit folgender Eigenschaft: für zwei von x_r verschiedene Punkte x_1 und x_2 dieser Umgebung gilt stets

$$|\, q(f;\, x_1,\, x_r) - q(f;\, x_2,\, x_r)\, | < \varepsilon,$$

was mit

(208) $$|\, u(f;\, x_1,\, x_2;\, x_r)\, | < \varepsilon$$

identisch ist.

Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}\, v(x_r)$; es sei U eine beliebige Umgebung von x_r. Dann gibt es voraussetzungsgemäß einen Index $n = N$, für welchen

(209a) $$K(N,\, x_r) < U$$

(209b) $$\frac{m(N,\, x_r)}{b_N - a_N} > v(x_r) - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{2}\,\varepsilon$$

ist. Nun ist in der alternierenden natürlichen Approximation die Funktion $s_N^*(x)$ in $\overline{K}(N,\, x_r)$ linear, und zwar ist nach (138b):

(210) $$s_N^*(x) = L(f;\, a_N,\, b_N;\, x).$$

Die Funktion $f^*_{N+1}(x)$ ist bei geradem N eine linear-konkave, bei ungeradem N eine linear-konvexe Grundfunktion, deren absoluter Betrag den Maximalwert $m(N, x_r)$ in mindestens einem *Hauptpunkt* $c_n \in K(N, x_r)$ annimmt; es ist also $x_r \neq c$. Nach Satz 58 und nach (210) ist dann in $K(N, x_r)$

a) bei geradem N

$$L(f; a_N, b_N; x) \leqq f(x) \leqq L(f; a_N, b_N; x) + f^*_{N+1}(x) \leqq L(f; a_N, b_N; x) + m(N, x_r) \tag{211a}$$

b) bei ungeradem N

$$L(f; a_N, b_N; x) \geqq f(x) \geqq L(f; a_N, b_N; x) - m(N, x_r). \tag{211b}$$

Die Funktion $f(x)$ genügt daher nach der Bemerkung zu Hilfssatz 2 in $\overline{K}(N, x_r)$ den Voraussetzungen dieses Hilfssatzes, so daß für mindestens ein Punktepaar x_1, x_2 aus dem Tripel (a_n, b_n, c_n) die Abschätzung

$$| u(f; x_1, x_2; x_r) | > \frac{m(N, x_r)}{b_N - a_N} > \frac{3}{2}\varepsilon$$

gilt, und daher die Differentiationsbedindung (208) in keiner Umgebung von x_r erfüllt ist.

Der soeben bewiesene Satz ermöglicht uns die Konstruktion einer sehr umfassenden Klasse von Funktionen, die in keinem Restpunkt differenzierbar sind. Wir schränken die Allgemeinheit der Vorgabe d) der Einheitskonstruktion durch folgende Bestimmung ein: Setzen wir $K_{n-1,n} = (a_{n-1,r}, b_{n-1,r})$, so soll für unendlich viele Indizes $\{n_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ die Abschätzung

$$\frac{m_{n_i, r}}{b_{n_i-1, r} - a_{n_i-1, r}} \geqq \varkappa > 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{212}$$

bestehen, wobei $\varkappa$ eine von i und r unabhängige Konstante ist.

Insbesondere ist die Bedingung (212) weitgehend erfüllt, wenn für *alle* Wertepaare (n, r) die Ungleichung (212) gilt. Dies läßt sich immer im Einklang mit den Bedingungen (180c) und (181b) erreichen; man setze beispielsweise für alle Wertepaare n, r

$$m_{n,r} = \varkappa(b_{n,r} - a_{n,r}). \tag{213}$$

§ 3. Nirgends differenzierbare stetige Funktionen.

Ist die Funktion $f(x)$ in $\overline{J}$ stetig definiert und nirgends in J differenzierbar, so gilt für ihre Struktur der Satz 50.

Durch eine Kombination der in den beiden ersten Paragraphen erreichten Ergebnisse erhalten wir eine sehr übersichtliche Klasse von nirgends differenzierbaren stetigen Funktionen. Ist nämlich jede der Mengen $F^*_n(f, J)$ endlich und ist die Bedingung (212) erfüllt, so ist $f(x)$ in den Hauptpunkten auf Grund des Satzes 76, in den Restpunkten auf Grund des Satzes 77 nicht differenzierbar.

Die einheitliche Konstruktion dieser Klasse nirgends differenzierbarer Funktionen verläuft danach auf folgende Weise:

a) die vollkommene F_σ-Menge F wird als abzählbare auf $\overline{J}$ dichte Menge vorgegeben;

b) als kanonische Darstellung (179a) von F wählen wir eine solche, in welcher jeder Summand F_n aus endlich vielen Punkten besteht;

c) sind $(a_{n,r}, b_{n,r})$ $(r = 1, 2, \ldots)$ die Komponenten von B_n, so wählen wir

$$m_{n,r} \geqq \varkappa(b_{n-1,r} - a_{n-1,r}), \quad \varkappa > 0 \text{ konstant};$$

setzen wir noch $m_n = \max m_{n,r}$, so lassen wir die Folge $\{m_n\}$ monoton nach Null abnehmen.

Aus diesen Vorgaben erhalten wir nach dem Verfahren des § 8 im vorhergehenden Abschnitt stets eine nirgends in J differenzierbare stetige Funktion.

Sind aber die Mengen $F_*^n(f, \bar{J})$ von einem bestimmten Index $N \geqq 1$ an nicht mehr endlich (beispielsweise perfekt und nirgends dicht), so ist die Nichtdifferenzierbarkeit zwar in den Restpunkten durch die Bedingung (212) gesichert, nicht aber in den Hauptpunkten. Diese Bedingung (212) wird erst dann hinreichend für die Nichtdifferenzierbarkeit in den Hauptpunkten, wenn wir die Struktur der Mengen $B_n^*(f, J)$ noch einer Zusatzforderung unterwerfen, die wir nunmehr entwickeln.

Sind $x_1 < x_2$ zwei Punkte von $F_n^*(f, \bar{J})$, so enthält das Intervall (x_1, x_2) Komponenten von $B_n^*(f, \bar{J})$, unter denen sich mindestens eine größte befindet. Die Länge dieser größten Komponente bezeichnen wir mit $\eta(n; x_1, x_2)$ und bilden den Quotienten

$$\vartheta(n; x_1, x_2) = \frac{\eta(n; x_1, x_2)}{x_2 - x_1}; \tag{214}$$

offensichtlich ist

$$0 < \vartheta(n; x_1, x_2) \leqq 1. \tag{214a}$$

Nun sei $x_j \in F_n^*(f, \bar{J})$ zugleich Häufungspunkt von Punkten $\xi < x_j$, $\xi \in F_n^*$. Dann setzen wir

$$\mu^-(n; x_j) = \overline{\lim_{\xi \to x_j}}\, \vartheta(n; \xi, x_j). \tag{215a}$$

Ist aber x_j Häufungspunkt von Punkten $\xi > x_j$, $\xi \in F_n^*(f, \bar{J})$, so setzen wir

$$\mu^+(n, x_j) = \overline{\lim_{\xi \to x_j}}\, \vartheta(n; x_j, \xi). \tag{215b}$$

Aus (214a) bis (215b) folgt

$$0 \leqq \mu^-(n, x_j) \leqq 1 \tag{216a}$$

$$0 \leqq \mu^+(n, x_j) \leqq 1. \tag{216b}$$

Schließlich setzen wir noch

$$\mu^-(x_j) = \lim_{n \to \infty} \mu^-(n, x_j) \tag{217a}$$

$$\mu^+(x_j) = \lim_{n \to \infty} \mu^+(n, x_j), \tag{217b}$$

und

$$\mu(x_j) = \operatorname{Max}\,[\mu^-(x_j), \mu^+(x_j)], \tag{218}$$

wobei offensichtlich

$$0 \leqq \mu(x_j) \leqq 1 \tag{219}$$

ist.

Satz 78. *Die Funktion $f(x)$ sei in $\bar{J}$ überall doppelwendig; ihre alternierende natürliche Approximation erfülle die Bedingung* (212) *für alle Wertepaare n, r. Es sei x_j ein Hauptpunkt, der Häufungspunkt von $F_n^*(f, \bar{J})$ für $n \geqq n(x_j)$ sei, und es sei*

$$\mu(x_j) = \mu > 0. \tag{220}$$

Dann ist $f(x)$ in x_j nicht differenzierbar.

Beweis. Wir führen den Beweis für $\mu = \mu^+(x_j)$; der entgegengesetzte Fall erledigt sich analog. Es sei U eine beliebige Umgebung von x_j; wir geben uns vor

$$\varepsilon = \frac{\varkappa \mu}{2}. \tag{221}$$

Nach unserer Annahme gibt es einen Index $N \geqq n(x_j)$ und einen Punkt $x_k > x_j$; $x_k \in F_N^*(f, \bar{J})$, für den

$$\vartheta(N; x_j; x_k) > \frac{\mu}{2} \tag{222}$$

ist; es existiert also in (x_j, x_k) eine Komponente (a_N, b_N) von $B_N^*(f, J)$, für welche

$$\frac{b_N - a_N}{x_k - x_j} > \frac{\mu}{2}$$

ist; wegen $x_j < a_N < b_N \leqq x_k$ ist damit auch

$$\frac{b_N - a_N}{b_N - x_j} > \frac{\mu}{2}. \tag{223}$$

Nun sei N gerade (der entgegengesetzte Fall erledigt sich analog). Dann existiert in (a_N, b_N) ein Punkt c_N, für welchen

$$f(c_N) = L(f; a_N, b_N; c_N) + m \tag{224}$$

ist, mit

$$m \geqq \varkappa(b_N - a_n). \tag{224a}$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist entweder

$$\frac{f(a_N) + m - f(x_j)}{a_N - x_j} \leqq \frac{f(c_n) - f(x_j)}{c_N - x_j} = q(f; x_j, c_n) \tag{225a}$$

oder

$$\frac{f(b_N) + m - f(x_j)}{b_N - x_j} < \frac{f(c_N) - f(x_j)}{c_N - x_j} = q(f; x_j, c_N). \tag{225b}$$

Im ersten Falle erhalten wir aus (225a), (224a) und (223)

$$\begin{aligned} q(f; x_j, c_N) &\geqq q(f; x_j, a_N) + \frac{m}{a_N - x_j} \geqq q(f; x_j, a_N) + \varkappa \frac{b_N - a_N}{a_N - x_j} \\ &> q(f; x_j, a_N) + \varkappa \frac{b_N - a_N}{b_N - x_j} > q(f; x_j, a_N) + \frac{\varkappa\mu}{2} \end{aligned}$$

also $|u(f; a_N, c_N; x_j)| > \frac{\varkappa\mu}{2} = \varepsilon$; im zweiten Fall erhalten wir

$$q(f; x_j, c_N) \geqq q(f; x_j, b_N) + \frac{m}{b_N - x_j} > q(f; x_j, b_N) + \frac{\varkappa\mu}{2},$$

also

$$|u(f; c_N, b_N; x_j)| > \varepsilon;$$

in beiden Fällen ist somit die Bedingung (208) nicht erfüllt, womit der Satz bewiesen ist.

Enthalten die für die Einheitskonstruktion einer stetigen Funktion $f(x)$ vorgegebenen Mengen F_n von einem bestimmten Index an unendlich viele Punkte, so wird $f(x)$ nirgends differenzierbar, wenn *erstens* für jeden Punkt x_j, der Häufungspunkt von $F_{n \geq n(x_j)}$ ist, die Beziehung

$$\mu(x_j) \geqq \mu > 0 \tag{226}$$

gilt, wobei $\mu \leqq 1$ eine von x_j unabhängige Konstante ist; *zweitens* über die Größen $m_{n,r}$ im Sinne der Bedingung (212) für *alle* Indizes n verfügt wird.

Eingegangen 24. Februar 1956.

Über die einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Produkte.

Von *Fritz Rühs* in Rostock.

Eine Arbeit von L. Rédei [2] hat zu mehreren Untersuchungen über Spezialfälle des allgemeinen Rédeischen schiefen Produktes $G \circ \Gamma$ Anlaß gegeben. Sind G und Γ zwei beliebige Gruppen, so besteht $G \circ \Gamma$ aus den Elementepaaren (a, α) mit $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$, zwischen denen eine Produktbildung erklärt ist durch das Multiplikationsgesetz

$$G \circ \Gamma: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha}\beta^{\alpha}, a^{b}\alpha^{b}\beta).$$

Darin sind $b^{\alpha}, \beta^{\alpha} \in G$, $a^{b}, \alpha^{b} \in \Gamma$ gewisse Funktionen der angegebenen Argumente.

Rédei nennt insbesondere das schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ k-fach ausgeartet, wenn genau k der vier Relationen

$$b^{\alpha} = b, \ \beta^{\alpha} = e, \ a^{b} = \varepsilon, \ \alpha^{b} = \alpha$$

identisch erfüllt sind. Es gibt im wesentlichen vier verschiedene zweifach ausgeartete schiefe Produkte, die mit $G_1 \Gamma$ bis $G_4 \Gamma$ bezeichnet werden. Eine besondere Rolle spielen die Gruppen $G_1 \Gamma$ und $G_2 \Gamma$, definiert durch die Multiplikationsgesetze

$$G_1 \Gamma: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^{b}\alpha^{b}\beta),$$

$$G_2 \Gamma: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha}, \alpha^{b}\beta).$$

Die Gruppen $G_2 \Gamma$ sind die sog. Zappa-Szép-Produkte, während die Gruppen $G_1 \Gamma$ mit den Schreierschen Erweiterungen identisch sind. Die übrigen zweifach ausgearteten Gruppen, definiert durch die Multiplikationsgesetze

$$G_3 \Gamma: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab\beta^{\alpha}, a^{b}\alpha\beta),$$

$$G_4 \Gamma: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha}, a^{b}\alpha\beta),$$

sind eingehend von R. Kochendörffer [1] untersucht worden. Sie lassen sich beide auffassen als eine zweimalige Schreiersche Erweiterung gewisser Untergruppen. Im Anschluß hieran stellte L. Rédei [3] die Frage, ob etwas Ähnliches auch für das allgemeine schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ gilt. Die Beantwortung dieser Frage ist wegen der komplizierten Struktur dieser Gruppe sehr schwierig. Wir können aber auf diese Frage eine Antwort geben für den Fall der einfach ausgearteten Gruppen. Es gibt im wesentlichen zwei verschiedene einfach ausgeartete Gruppen. Die eine von ihnen, nämlich die Gruppe $G * \Gamma$, definiert durch das Multiplikationsgesetz

$$G * \Gamma: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab\beta^{\alpha}, a^{b}\alpha^{b}\beta),$$

in der also identisch $b^{\alpha} = b$ gilt, erweist sich ebenfalls als eine zweimalige Schreiersche Erweiterung gewisser Untergruppen, während die andere einfach ausgeartete Gruppe $G ** \Gamma$, definiert durch

$$G ** \Gamma: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha}, a^{b}\alpha^{b}\beta),$$

in der also identisch $\beta^{\alpha} = e$ gilt, eine einfache Schreiersche Erweiterung gewisser Untergruppen ist, von denen die eine ein Zappa-Szép-Produkt ist.

I.

1. Es sei die Gruppe $G * \Gamma$ definiert durch das Multiplikationsgesetz

$$G * \Gamma: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab\beta^a, a^b\alpha^b\beta)$$

und habe die Einheit (e, ε), worin e bzw. ε die Einselemente der Gruppen G bzw. Γ bedeuten. Aus dem Assoziativgesetz der Gruppenmultiplikation folgt die Gültigkeit folgender Relationen für alle $a, b, c \in G$; $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$:

$$\begin{array}{lll}
(1) & a^\alpha = a;\ e^\alpha = \varepsilon^\alpha = \alpha^\varepsilon = e, & \alpha^e = \alpha;\ \varepsilon^a = e^a = a^e = \varepsilon, \\
(2) & c^{a^b} = c, & \gamma^{\alpha^\beta} = \gamma, \\
(3) & \gamma^{a^b} = e, & c^{\alpha^\beta} = \varepsilon, \\
(4) & (b^c)^\alpha = e, & \gamma^a\beta^a = (\beta^\gamma)^a(\gamma\beta)^a, \\
(5) & \beta^\alpha c = c(\beta^c)^\alpha, & \gamma^{ba}b^a = b^a(\gamma^b)^a, \\
(6) & \beta^\alpha\gamma^{\alpha\beta} = \gamma^\beta(\beta\gamma)^\alpha, & c^{ba}b^a = (cb)^a(c^b)^a, \\
(7) & (b^c\gamma)^\alpha = \gamma^\alpha, & (c\beta^\gamma)^a = c^a(\beta^\gamma)^a;
\end{array}$$

aus ihnen folgt noch durch Spezialisierung

$$\begin{array}{lll}
(8) & \gamma^{\alpha^b} = \gamma^\alpha, & \gamma^{b\alpha^\beta} = \gamma^b, \\
(9) & \gamma^{a^b\beta} = \gamma^\beta, & c^{b\alpha^\beta} = c^b.
\end{array}$$

Es seien nun

G_1 die von allen α^β erzeugte Untergruppe von G,

Γ_1 die von allen a^b erzeugte Untergruppe von Γ;

dann gelten in Verallgemeinerung von (2) und (3) die Beziehungen

$$\begin{array}{lll}
(2') & c^{\alpha_1} = c, & \gamma^{a_1} = \gamma, \\
(3') & \gamma^{\alpha_1} = e, & c^{a_1} = \varepsilon,
\end{array}$$

für alle $c \in G$, $\gamma \in \Gamma$, $a_1 \in G_1$, $\alpha_1 \in \Gamma_1$.

Beweis. Wir beweisen dies etwa für die rechten Formeln. Jedes Element aus G_1 ist ein Produkt aus Elementen der Form α^β bzw. aus den Inversen solcher Elemente. Wegen (2) und (3) genügt es zu beweisen: Folgt für beliebige Elemente $a_1, b_1 \in G_1$ und beliebige Elemente $c \in G$, $\gamma \in \Gamma$ aus der Gültigkeit der Relationen

$$\gamma^{a_1} = \gamma, \quad \gamma^{b_1} = \gamma; \quad c^{a_1} = \varepsilon, \quad c^{b_1} = \varepsilon$$

auch die Gültigkeit von

$$\gamma^{b_1 a_1} = \gamma, \quad \gamma^{b_1^{-1}} = \gamma, \quad c^{b_1 a_1} = \varepsilon, \quad c^{b_1^{-1}} = \varepsilon,$$

so ergeben sich die Behauptungen (2′) und (3′) durch vollständige Induktion.

In der Tat: aus (5_2) folgt $\gamma^{b_1 a_1} = \gamma$ und aus (6_2) ebenso $c^{b_1 a_1} = \varepsilon$. Für $b = b_1$, $a = b_1^{-1}$ und beliebiges $c \in G$ ergibt (6_2)

$$b_1^{b_1^{-1}} = (cb_1)^{b_1^{-1}},$$

insbesondere für $c = b_1^{-1}$ also $b_1^{b_1^{-1}} = e$, d. h. wenn man c wieder alle Elemente von G durchlaufen läßt

$$c^{b_1^{-1}} = e \text{ für jedes } c \in G \text{ und jedes } b_1^{-1} \in G;$$

genau so ergibt (5_2) für $b = b_1$, $a = b_1^{-1}$

$$\gamma^{b_1^{-1}} = \gamma.$$

Wegen

$$(a_1, \varepsilon)(b_1, \varepsilon) = (a_1 b_1, \varepsilon)$$

ist $G_1 \cong (G_1, \varepsilon)$ eine Untergruppe von G.

Genau so beweist man, daß auch $\Gamma_1 \cong (e, \Gamma_1)$ eine Untergruppe von Γ ist. Schließlich folgt noch aus

$$(a_1, \varepsilon)(e, \alpha_1) = (e, \alpha_1)(a_1, \varepsilon) = (a_1, \alpha_1),$$

daß das Gruppenpaar (G_1, Γ_1) das direkte Produkt der beiden Untergruppen (G_1, ε) und (e, Γ_1) von $G * \Gamma$ ist:

$$(G_1, \Gamma_1) = (G_1, \varepsilon) \times (e, \Gamma_1) \cong G_1 \times \Gamma_1.$$

2. Aus (5_1) folgt zweierlei: Erstens ist G_1 abelsch, denn für $c = \gamma^\delta$ folgt mit (2_2)

$$\beta^\alpha \gamma^\delta = \gamma^\delta \beta^\alpha;$$

zweitens ist G_1 Normalteiler von G, da $(\beta^c)^\alpha \in G_1$ ist. Setzt man

$$G = \sum_{A \in G/G_1} u_A G_1,$$

worin A die Elemente von G/G_1 durchläuft, so folgt zunächst aus (5_1)

$$\beta^\alpha cd = cd(\beta^{cd})^\alpha = c(\beta^c)^\alpha d = cd\big((\beta^c)^d\big)^\alpha,$$

d. h. es ist

$$\big((\beta^c)^d\big)^\alpha = (\beta^{cd})^\alpha \text{ für alle } c, d \in G;\ \alpha, \beta \in \Gamma.$$

Hiermit wird aber

$$u_{AB}^{-1} u_A u_B \beta^\alpha = \beta^\alpha u_{AB}^{-1} u_A u_B;$$

$u_{AB}^{-1} u_A u_B$ ist also mit allen Elementen von G_1 vertauschbar. Das ist für beliebiges $u_A, u_B \in G$ nach (5_1) aber nur dann der Fall, wenn $u_{AB}^{-1} u_A u_B \in G_1$, d. h. wenn

$$u_A u_B = u_{AB} a_{A,B} \tag{10}$$

ist mit einem gewissen Faktorensystem $a_{A,B}$ aus G_1.

Wir beweisen nun

(11) *Das Mengenpaar (G_1, Γ) ist Normalteiler von $G * \Gamma$.*

Zunächst folgt aus

$$(a_1, \alpha)(b_1, \beta) = (a_1 b_1 \beta^\alpha, \alpha\beta), \qquad (a_1, b_1 \in G_1,\ \alpha, \beta \in \Gamma),$$

daß (G_1, Γ) eine Untergruppe von $G * \Gamma$ ist.

Damit (G_1, Γ) Normalteiler von $G * \Gamma$ ist, muß sich ein $c_1 \in G_1$ und ein $\gamma \in \Gamma$ so bestimmen lassen, daß zu vorgegebenem (b_1, β) die Beziehung

$$(a, \alpha)(b_1, \beta) = (c_1, \gamma)(a, \alpha)$$

besteht. Die Ausführung der Multiplikationen ergibt

$$(ab_1\beta^\alpha, \alpha\beta) = (c_1 a \alpha^\gamma, c_1^a \gamma^a \alpha),$$

d. h. es muß gelten

$$c_1 = ab_1\beta^\alpha(\alpha^\gamma)^{-1}a^{-1}, \qquad \alpha\beta = c_1^a \gamma^a \alpha.$$

Da $b_1\beta^\alpha(\alpha^\gamma)^{-1} \in G_1$ und G_1 Normalteiler von G ist, so ist in der Tat $c_1 \in G_1$. Setzt man in der zweiten Relation $\gamma^a = (c_1^a)^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1} = \varrho$, so liefert (5_2), wenn man darin a und b vertauscht, $\gamma^{ab} = a^b \varrho^b (a^b)^{-1}$, und daraus folgt für $b = a^{-1}$ nach (1)

$$\gamma = a^{a^{-1}} \varrho^{a^{-1}} (a^{a^{-1}})^{-1}.$$

Also ist (G_1, Γ) Normalteiler von $G * \Gamma$.

3. Setzt man $\beta^\alpha = c_{\alpha,\beta}$ in der Gleichung (6_1), so lautet sie

$$c_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta,\gamma} = c_{\beta,\gamma} c_{\alpha,\beta\gamma}$$

und besagt, daß die Elemente β^α ein Faktorensystem für eine Erweiterung von G_1 mit Γ bilden, bei der in G_1 durch Γ der identische Automorphismus induziert wird. Da in der Tat $(c_1, \gamma) = (c_1, \varepsilon)(e, \gamma)$ ist, so ist

$$(G_1, \Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} (G_1, \varepsilon)(e, \gamma)$$

und es wird

$$\begin{aligned}(a_1, \varepsilon)(e, \alpha)(b_1, \varepsilon)(e, \beta) &= (a_1, \varepsilon)(b_1, \varepsilon)(e, \alpha)(e, \beta)\\ &= (a_1 b_1, \varepsilon)(\beta^\alpha, \alpha\beta)\\ &= (a_1 b_1, \varepsilon)(\beta^\alpha, \varepsilon)(e, \alpha\beta), \quad (\beta^\alpha, \varepsilon) \in (G_1, \varepsilon).\end{aligned}$$

(G_1, Γ) ist also die Erweiterung von (G_1, ε) mit Γ zum Faktorensystem β^α und mit identischem Automorphismensystem.

Der erste Teil dieses Satzes ergibt sich übrigens auch folgendermaßen: Wegen

$$(a_1, \alpha)(b_1, \varepsilon) = (b_1, \varepsilon)(\alpha_1, \alpha) = (a_1 b_1, \alpha)$$

liegt (G_1, ε) im Zentrum von (G_1, Γ), also läßt sich (G_1, Γ) auffassen als Erweiterung von (G_1, ε) mit $(G_1, \Gamma)/(G_1, \varepsilon) \cong \Gamma$.

Setzt man, im Hinblick auf (11),

$$G * \Gamma = \sum_{A \in G/G_1} (u_A, \varepsilon)(G_1, \Gamma),$$

so wird, falls $a_1 u_B = u_B d_1$ ist, mit Benutzung von (10)

$$\begin{aligned}(u_A, \varepsilon)(a_1, \alpha)(u_B, \varepsilon)(b_1, \beta) &= (u_A, \varepsilon)(u_B d_1, a_1^{u_B} \alpha^{u_B})(b_1, \beta)\\ &= (u_A, \varepsilon)(u_B, \varepsilon)(d_1, a_1^{u_B} \alpha^{u_B})(b_1, \beta)\\ &= (u_A u_B, u_A^{u_B})(d_1, a_1^{u_B} \alpha^{u_B})(b_1, \beta)\\ &= (u_{AB}, \varepsilon)(a_{A,B}, u_A^{u_B})(d_1, a_1^{u_B} \alpha^{u_B})(b_1, \beta).\end{aligned}$$

Daher ist $G * \Gamma/(G_1, \Gamma) \cong G/G_1$ und $G * \Gamma$ ist die Erweiterung von (G_1, Γ) mit G/G_1 zum Faktorensystem $(a_{A,B}, u_A^{u_B})$. Aus der Gleichung

$$(u_B, \varepsilon)(u_B^{-1} a_1 u_B, a_1^{u_B} \alpha^{u_B}) = (a_1, \alpha)(u_B, \varepsilon)$$

folgt, daß der dem Element B aus G/G_1 zugeordnete Automorphismus von (G_1, Γ)

$$(a_1, \alpha) \to (u_B^{-1} a_1 u_B, a_1^{u_B} \alpha^{u_B})$$

ist.

Zusammenfassend haben wir damit folgenden Satz gewonnen:

Satz. *Ist G_1 die von allen Elementen α^β erzeugte Untergruppe von G, dann ist $G * \Gamma$ die Erweiterung von (G_1, Γ) mit G/G_1 zum Faktorensystem $(a_{A,B}, u_A^{u_B})$ in (10) und mit dem Automorphismensystem*

$$(a_1, \alpha) \to (u_B^{-1} a_1 u_B, a_1^{u_B} \alpha^{u_B}).$$

(G_1, Γ) selbst ist die Erweiterung von $G_1 \cong (G_1, \varepsilon)$ mit Γ zum Faktorensystem $(\beta^\alpha, \varepsilon)$ und mit identischem Automorphismensystem.

II.

Fordert man im allgemeinen schiefen Produkt $G \circ \Gamma$ die Relation $\beta^\alpha = e$, so erhält man die zweite einfach ausgeartete Gruppe $G ** \Gamma$, definiert durch das Multiplikationsgesetz

$$G ** \Gamma: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, a^b \alpha^b \beta).$$

Die Gruppe habe wieder das Einselement (e, ε), worin e bzw. ε das Einselement von G bzw. Γ ist. Das Assoziativgesetz der Gruppenmultiplikation verlangt die Gültigkeit folgender Relationen für alle $a, b, c \in G$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$:

$$\begin{array}{lll}
(1) & a^\varepsilon = a,\ e^\alpha = e, & \alpha^e = \alpha,\ \varepsilon^a = e^a = a^e = \varepsilon, \\
(2) & c^{a^b} = c, & a^{\beta} = a^{\hat{}}, \\
(3) & (bc)^\alpha = b^\alpha c^{\alpha^b}, & (\gamma\beta)^\alpha = \gamma^{\alpha^\beta} \beta^\alpha, \\
(4) & c^{\alpha\beta} = (c^\beta)^\alpha, & c^{b^a} b^\alpha = (cb)^a (c^{\hat{}})^\alpha, \\
(5) & c^{a^b\beta} = c^{\beta a^b} = c^\beta, & \gamma^{b^a} b^a = (b^\gamma)^a (\gamma^{\hat{}})^a.
\end{array}$$

Zunächst ist $\Gamma \cong (e, \Gamma)$ eine Untergruppe von $G ** \Gamma$, denn nach (1) ist $(e, \alpha)(e, \beta) = (e, \alpha\beta)$.

Diejenigen $\alpha_1 \in \Gamma$, für die $a^{\alpha_1} = a$ für jedes $a \in G$ gilt, bilden wegen (4_1) eine Untergruppe Γ_1 von Γ. Wegen (2_1) sind insbesondere alle Elemente der Form a^b in Γ_1 enthalten. Die Extremfälle sind $\Gamma_1 = \varepsilon$ und $\Gamma_1 = \Gamma$; im ersteren Fall ist unser Produkt das Zappa-Szép-Produkt $G \,{}_2\, \Gamma$, im letzteren Fall die Schreiersche Erweiterung $G \,{}_1\, \Gamma$.

(4_1) ergibt $c^{\alpha_1\beta} = c^{\beta\alpha_1} = c^\beta$, und daraus folgt sofort

$$c^{\alpha\beta_1\alpha^{-1}} = (c^{\beta_1\alpha^{-1}})^\alpha = (c^{\alpha^{-1}})^\alpha = c^e = c,$$

d. h. aber $\alpha\beta_1\alpha^{-1} \in \Gamma_1$ für alle $\alpha \in \Gamma$, $\beta_1 \in \Gamma_1$; also ist Γ_1 Normalteiler von Γ.

Schließlich folgt noch aus (3_1), daß mit jedem $b \in G$ und jedem $\alpha_1 \in \Gamma_1$ auch $\alpha_1^b \in \Gamma_1$ ist.

Aus der Beziehung $(a, \alpha)(e, \beta) = (e, \gamma_1)(a, \alpha)$ ergibt sich durch Ausmultiplikation $\beta = \alpha^{-1}\gamma_1^a\alpha \in \Gamma_1$, und das besagt, daß auch $\Gamma_1 \cong (e, \Gamma_1)$ Normalteiler von $G ** \Gamma$ ist.

Setzt man daher

$$\Gamma = \sum_{A \in \Gamma/\Gamma_1} \varrho_A \Gamma_1,$$

worin A die Elemente von Γ/Γ_1 durchläuft, so ist

$$G ** \Gamma = \sum_{a \in G} \sum_{A \in \Gamma/\Gamma_1} (a, \varrho_A)(e, \Gamma_1).$$

Aus der Multiplikation der Restklassen

$$\begin{aligned}
(a, \varrho_A)(e, \Gamma_1)(b, \varrho_B)(e, \Gamma_1) &= (a, \varrho_A)(b, \Gamma_1\varrho_B)(e, \Gamma_1) = (a, \varrho_A)(b, \varrho_B\Gamma_1)(e, \Gamma_1) \\
&= (a, \varrho_A)(b, \varrho_B)(e, \Gamma_1)(e, \Gamma_1) \\
&= (ab^{\varrho_A}, a^b \varrho_A^b \varrho_B)(e, \Gamma_1) \\
&= (ab^{\varrho_A}, \varrho_A^b \varrho_B)(e, \Gamma_1)
\end{aligned}$$

folgt, daß $G ** \Gamma/(e, \Gamma_1) \cong G \,{}_2\, \Gamma/\Gamma_1$ ist.

Somit ist $G ** \Gamma$ die Schreiersche Erweiterung von $\Gamma_1 \cong (e, \Gamma_1)$ mit dem Zappa-Szép-Produkt $G \,{}_2\, \Gamma/\Gamma_1$. Das Faktorensystem (e, τ_1) der Erweiterung berechnet man aus der Gleichung

$$(a, \varrho_A)(b, \varrho_B) = (ab^{\varrho_A}, a^b \varrho_A^b \varrho_B) = (ab^{\varrho_A}, \varrho_A^b \varrho_B \tau_1) = (ab^{\varrho_A}, \varrho_A^b \varrho_B)(e, \tau_1),$$

also

$$(6) \qquad \tau_1 = (\varrho_A^b \varrho_B)^{-1} a^b \varrho_A^b \varrho_B.$$

Schließlich folgt aus

$$(e, \beta_1)(a, \varrho_A) = (a, \varrho_A)(e, \gamma_1),$$

d. h. $(a, \beta_1^{\alpha}\varrho_A) = (a, \varrho_A\gamma_1)$, daß der dem Element $(a, \varrho_A) \in G \,2\, \Gamma/\Gamma_1$ zugeordnete Automorphismus von (e, Γ_1)

$$(e, \beta_1) \to (e, \varrho_A^{-1}\beta_1^{\alpha}\varrho_A) \tag{7}$$

ist. Bezüglich der Gruppe $G ** \Gamma$ gilt also der Satz:

Satz. *Die Elemente von Γ_1 seien diejenigen $\alpha_1 \in \Gamma$, für die die Relation $a^{\alpha_1} = a$ für alle $a \in G$ gilt. Dann ist $G ** \Gamma$ die Schreiersche Erweiterung von Γ_1 mit $G \,2\, \Gamma/\Gamma_1$ zum Faktorensystem (e, τ_1) aus* (6) *und mit dem Automorphismensystem* (7).

Literaturverzeichnis.

[1] *R. Kochendörffer*, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, Journal f. d. reine u. angew. Math. **192** (1953), 96—101.

[2] *L. Rédei*, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, Journal f. d. reine u. angew. Math. **188** (1950), 201—227.

[3] *L. Rédei*, Besprechung der Arbeit von [1] im Zbl. f. Math. **51** (1954), 256—257.

Eingegangen 1. März 1956.

Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist.

Von *Wolfgang Gaschütz* in Kiel.

1. Die Vielgestaltigkeit der endlichen Gruppentypen beruht zum Teil darauf, daß für sie nicht allgemein die folgende Transitivität gilt:

(t) *Ist* $\mathfrak{N}$ *Normalteiler der Gruppe* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ *Normalteiler von* $\mathfrak{N}$, *so ist* $\mathfrak{M}$ *auch Normalteiler von* $\mathfrak{G}$.

Gruppenklassen, wie z. B. die dedekindschen[1]) Gruppen und die Operatormoduln — für diese in sinngemäßer Übertragung, nämlich für die zulässigen Teilbereiche an Stelle der Normalteiler — bei denen die Eigenschaft (t) erfüllt ist, erweisen sich wesentlich geschmeidiger in ihrer Behandlung. Es liegt daher nahe zu fragen, wie stark sich die Theorie der endlichen Gruppen vereinfachen würde, wenn die obige Transitivitätsforderung erfüllt wäre. Etwas bestimmter ausgedrückt, sei die Aufgabe gestellt, die Struktur der endlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft (t) zu untersuchen. Solche Gruppen nennen wir kurz *t-Gruppen*. Diese Bezeichnungsweise stammt von O. Taussky und E. Best, die in der Arbeit [1][2]) für endliche Gruppen, deren Sylowgruppen zyklisch sind, und etwas allgemeinere, durch Erzeugende und Relationen definierte Gruppenklassen das Bestehen von (t) nachgewiesen haben

Als Studie zur Theorie der überauflösbaren Gruppen gedacht, ist es in erster Linie das Bestreben der folgenden Seiten, die Behandlung der auflösbaren t-Gruppen zu einem Abschluß zu führen. Dieses Ziel wird erreicht durch eine Kennzeichnung, die es möglich macht, alle auflösbaren t-Gruppen aus den dedekindschen Gruppen als zerfallende Erweiterungen zu konstruieren und mit einem Satz von D. R. Taunt in handlicher Weise an den zur Konstruktion verwendeten Stücken zu entscheiden, wann zwei auflösbare t-Gruppen isomorph sind[1a]). Es werden ferner einige Eigenschaften nicht auflösbarer t-Gruppen angegeben, die sich auf den maximalen auflösbaren und den maximalen perfekten Normalteiler beziehen. Eine abschließende Behandlung wie im auflösbaren Falle dürfte nach dem heutigen Stande der Kenntnisse über eigentlich-einfache Gruppen und ihre Automorphismengruppen kaum gelingen.

Wenn im folgenden von Gruppen die Rede ist, so sind stets solche von endlicher Ordnung gemeint.

2. Wir stellen zunächst einige Tatsachen über t-Gruppen zusammen, die der mit den elementaren Sätzen der Gruppentheorie vertraute Leser leicht selbst bestätigen kann. Sie sind im wesentlichen alle schon in der Arbeit [1] angegeben.

---

[1]) Eine Gruppe nennen wir dedekindsch, wenn jede ihrer Untergruppen Normalteiler ist. Aus historischen und bezeichnungstechnischen Gründen erscheint es gerechtfertigt, für die aus den hamiltonschen und abelschen Gruppen bestehende Klasse diesen Terminus einzuführen.

[2]) [ ] verweist auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2a]) *Zusatz bei der Korrektur*: G. Zacher hat in der Arbeit [6] ebenfalls eine Charakterisierung der auflösbaren t-Gruppen angegeben. Die von ihm erzielten Resultate gehen jedoch in eine andere Richtung. Insbesondere wird von ihm nicht das Konstruktions- und Isomorphieproblem dieser Gruppenklasse behandelt.

Eine Gruppe ist genau dann t-Gruppe, wenn jede ihrer Kompositionsreihen Hauptreihe ist oder, in der von H. Wielandt eingeführten Bezeichnungsweise, wenn jede nachinvariante Untergruppe Normalteiler ist. Jeder Normalteiler und jede Faktorgruppe einer t-Gruppe ist ebenfalls t-Gruppe. Auflösbare t-Gruppen sind überauflösbar, d. h. ihre Hauptreihen haben als Indizes nur Primzahlen. Da in einer nilpotenten Gruppe jede Untergruppe nachinvariant ist, ist eine solche dann und nur dann t-Gruppe, wenn sie dedekindsch ist. Eine Gruppe, deren Sylowgruppen zyklisch sind, ist eine t-Gruppe. Denn die Sylowgruppen jedes Normalteilers und jeder Faktorgruppe sind zyklisch und jeder Normalteiler ist sogar charakteristische Untergruppe. Das letztere bestätigt man zunächst für die minimalen Normalteiler und erschließt es dann durch vollständige Induktion in den Faktorgruppen für beliebige Normalteiler.

3. Es sei nun $\mathfrak{G}$ eine auflösbare t-Gruppe. Da $\mathfrak{G}$ dann überauflösbar ist, besitzt es einen geordneten Sylowturm[3]). Wir benötigen im folgenden hiervon nur, daß $\mathfrak{G}$ eine charakteristische Untergruppe ungerader Ordnung enthält, deren Faktorgruppe 2-Potenzordnung hat. Als überauflösbare Gruppe hat $\mathfrak{G}$ ferner eine nilpotente Kommutatorgruppe[4]). Hiermit beweisen wir

Satz 1. *$\mathfrak{G}$ sei eine auflösbare t-Gruppe, $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ die maximale nilpotente Faktorgruppe*[5]) *von $\mathfrak{G}$. Dann ist*

(a) *$\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ dedekindsch,*

(b) *$\mathfrak{L} : 1$ ungerade,*

(c) *$\mathfrak{L}$ abelsch,*

(d) $(\mathfrak{G} : \mathfrak{L}, \mathfrak{L} : 1) = 1$

und es gilt:

(e) *die inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ induzieren in $\mathfrak{L}$ Potenzen*[6]) *n, $(n, \mathfrak{L} : 1) = 1$ derart, daß zu jedem Primteiler p von $\mathfrak{L} : 1$ ein n existiert mit $n \not\equiv 1 \bmod p$.*

Beweis. (a) ist nach Nr. 2 klar, da $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ nilpotente Faktorgruppe einer t-Gruppe ist.

(b) $\mathfrak{L}$ liegt nach Definition in der charakteristischen Untergruppe, die ungerade Ordnung und 2-Potenzindex hat.

(c) $\mathfrak{L}$ liegt in der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$, ist also nilpotent, als Normalteiler einer t-Gruppe selbst t-Gruppe und nach (b) und Nr. 2 daher abelsch.

(d) und (e). Es sei p ein Primteiler von $\mathfrak{L} : 1$. Dann ist $p \neq 2$ nach (b). Da $\mathfrak{L}$ abelsch und $\mathfrak{G}$ t-Gruppe ist, existiert ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L} : \mathfrak{N} = p$. Ist $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ von ungerader Ordnung und als nilpotenter Normalteiler einer t-Gruppe abelsch. In der nilpotenten Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ gibt es einen Normalteiler $\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P} \cap \overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{L}$. Die durch die inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ induzierten Automorphismen lassen sämtliche Untergruppen von $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ invariant. In abelschen Gruppen sind solche Automorphismen aber Potenzen n[7]):

$$L \to L^n,\ L \in \mathfrak{L},\ (n, \mathfrak{L} : 1) = 1 \text{ bzw. } P\mathfrak{N} \to (P\mathfrak{N})^n,\ P\mathfrak{N} \in \mathfrak{P}/\mathfrak{N},\ (n, p) = 1.$$

---

[3]) [3], Definition 2 und Satz 7.

[4]) [3], Satz 8.

[5]) Bekanntlich hat in einer beliebigen Gruppe der Durchschnitt zweier Normalteiler mit nilpotenten Faktorgruppen wieder nilpotente Faktorgruppe.

[6]) Eine Abbildung π einer Gruppe $\mathfrak{G}$ in sich wird Potenz genannt, wenn eine nur von π abhängende Zahl n existiert mit $G^\pi = G^n$ für alle $G \in \mathfrak{G}$.

[7]) Diese in der Literatur sicherlich schon mehrfach behandelte Tatsache beweist man leicht folgendermaßen: Sei $A_1, \ldots, A_r$ eine Basis der abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$, a_i die Ordnung von A_i, $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_r$, σ ein Automorpishmus von $\mathfrak{A}$, der alle Untergruppen von $\mathfrak{A}$ fest läßt, $A_r^\sigma = A_r^n$, $A_i^\sigma = A_i^m$, $(A_i A_r)^\sigma = (A_i A_r)^l$. Dann ist $A_i^l A_r^l = A_i^m A_r^n$, also $l \equiv n \bmod a_r$, $l \equiv m \bmod a_i$; daher $l \equiv n \bmod a_i$ und $A_\sigma^i = A_i^n$ für alle Basiselemente A_i: $A^\sigma = A^n$ also für alle Elemente A von $\mathfrak{A}$.

$\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{N}$ ist nicht nilpotent, da anderenfalls im Gegensatz zur Wahl von $\mathfrak{L}$ die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} = \mathfrak{P}/\mathfrak{N} \cdot \overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{N}$ nilpotent wäre. $\mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ bleibt daher unter den Transformationen von $\mathfrak{G}$ nicht elementweise invariant. Unter den in $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ induzierten Potenzen treten also solche auf, für die $n \not\equiv 1 \bmod p$ ist. Wäre $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{P}$, so ließen solche Potenzen die Elemente aus $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ nicht invariant. Das kann nicht sein, da $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ nach allgemeinen Sätzen über nilpotente Gruppen im Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ liegen müßte; w. z. b. w.

Nachträglich stellt man leicht fest, daß (b) und (c) aus (e) folgen.

Die Eigenschaften (a), (d), (e) kennzeichnen schon die auflösbaren t-Gruppen:

Satz 2. *Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, $\mathfrak{L}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und gelten* (a), (d) *des Satzes* 1 *und*

(e*) *es induzieren die inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{L}$ Potenzen,*

so ist $\mathfrak{G}$ eine auflösbare t-Gruppe.

Ist sogar (e) *des Satzes* 1 *an Stelle von* (e*) *erfüllt, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ die maximale nilpotente Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Jede Untergruppe von $\mathfrak{L}$ ist (e*) zufolge Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{L}$ daher dedekindsch, $\mathfrak{G}$ also nach (a) auflösbar.

Sei $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ Normalteiler von $\mathfrak{N}$. Nach (a) ist $\mathfrak{O} = \mathfrak{M}\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ferner ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}$ nach (d) der größte Normalteiler von $\mathfrak{O}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}$ mit einer Ordnung, die zu $\mathfrak{L} : 1$ teilerfremd ist. Also ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}$ charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{O}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}$ und damit $\mathfrak{M}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Sei jetzt (e) erfüllt und $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}^*$ die maximale nilpotente Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$. Die Gruppe $\mathfrak{L}^*$ liegt in $\mathfrak{L}$. Wäre $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}^*$, so gäbe es einen $\mathfrak{L}^*$ umfassenden Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$, der maximal in $\mathfrak{L}$ ist. $\mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ wäre minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L} : \mathfrak{N} = p$ Primzahl. Unter den inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ gibt es solche, die in $\mathfrak{L}$ und damit auch in $\mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ Potenzen $n \not\equiv 1 \bmod p$ induzieren. Unter diesen bleibt aber kein Element $\neq \mathfrak{N}$ von $\mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ invariant. Da $\mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ liegen müßte, erhalten wir einen Widerspruch; es ist also $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^*$; w. z. b. w.

Satz 1 und 2 liefern eine Möglichkeit, die auflösbaren t-Gruppen aus den dedekindschen Gruppen zu konstruieren:

Satz 3. *$\mathfrak{L}$ sei eine abelsche Gruppe, $\mathfrak{D}$ eine dedekindsche Gruppe, $(\mathfrak{L} : 1, \mathfrak{D} : 1) = 1$, $\Pi_{\mathfrak{L}}$ die Gruppe der Automorphismen von $\mathfrak{L}$, die Potenzen sind. ϑ sei ein Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ in $\Pi_{\mathfrak{L}}$ derart, daß zu jedem Primteiler $p \mid \mathfrak{L} : 1$ ein $n = D^{\vartheta}$, $D \in \mathfrak{D}$, mit $n \not\equiv 1 \bmod p$ existiert. $\mathfrak{G}(\mathfrak{D}, \mathfrak{L}, \vartheta)$ sei die aus den Paaren (D, L), $D \in \mathfrak{D}$, $L \in \mathfrak{L}$ und der Verknüpfung*

$$(D_1, L_1)(D_2, L_2) = (D_1 D_2, L_1^{D_2^{\vartheta}} L_2)$$

gebildete Gruppe. Dann gilt:

(a) *$\mathfrak{G}(\mathfrak{D}, \mathfrak{L}, \vartheta)$ ist eine auflösbare t-Gruppe, deren maximale nilpotente Faktorgruppe isomorph mit $\mathfrak{D}$ ist; der zugehörige Normalteiler ist isomorph zu $\mathfrak{L}$.*

(b) *Ist $\mathfrak{G}$ eine auflösbare t-Gruppe und $\mathfrak{G}/\mathfrak{L} = \mathfrak{D}$ die maximale nilpotente Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$, so existiert ein Homomorphismus ϑ von $\mathfrak{D}$ in $\Pi_{\mathfrak{L}}$ mit der im Satz angegebenen Eigenschaft, für den $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}(\mathfrak{D}, \mathfrak{L}, \vartheta)$ ist.*

(c) *Sind $\mathfrak{G}(\mathfrak{D}, \mathfrak{L}, \vartheta)$ und $\mathfrak{G}(\mathfrak{D}', \mathfrak{L}', \vartheta')$ isomorph, so ist $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L}'$ isomorph. $\mathfrak{G}(\mathfrak{D}, \mathfrak{L}, \vartheta)$ und $\mathfrak{G}(\mathfrak{D}, \mathfrak{L}, \vartheta')$ sind dann und nur dann isomorph, wenn in der Automorphismengruppe von $\mathfrak{D}$ ein Element χ existiert, für das $\vartheta' = \vartheta\chi$ ist.*

Beweis. (a) folgt aus Satz 2, wenn $\mathfrak{L}$ mit der Menge der Elemente $(1, L)$, $L \in \mathfrak{L}$ identifiziert wird.

(b) $\mathfrak{G}$ zerfällt als Erweiterung über $\mathfrak{L}$ nach einem Satz von I. Schur, da

$$(\mathfrak{G} : \mathfrak{L}, [\mathfrak{L} : 1) = 1$$

ist nach Satz 1. Auf Grund der Sätze aus der Erweiterungstheorie[8]) und der anderen Aussagen des Satzes 1 stellt sich daher $\mathfrak{G}$ in der Form $\mathfrak{G}(\mathfrak{H}, \mathfrak{L}, \vartheta)$ dar.

(c) Die erste Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, daß der zur maximalen nilpotenten Faktorgruppe gehörige Normalteiler eine charakteristische Untergruppe ist; bei einem Isomorphismus von $\mathfrak{G}(\mathfrak{H}, \mathfrak{L}, \vartheta)$ auf $\mathfrak{G}(\mathfrak{H}', \mathfrak{L}', \vartheta')$ muß also $\mathfrak{L}$ nach (a) auf $\mathfrak{L}'$ abgebildet werden. Hieraus folgt auch die Isomorphie der Faktorgruppen. Die letzte Isomorphieaussage erhält man unmittelbar aus einem allgemeineren Satz von D. R. Taunt[9]), wenn man beachtet, daß $\Pi_{\mathfrak{L}}$ mit allen Automorphismen von $\mathfrak{L}$ elementweise vertauschbar ist; w. z. b. w.

Als einfache Folgerung aus Satz 2 erhalten wir noch

Satz 4. *Jede Untergruppe $\mathfrak{U}$ einer auflösbaren t-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine t-Gruppe.*

Beweis. Ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ die maximale nilpotente Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$, so wende man Satz 2 auf $\mathfrak{U}$ an Stelle von $\mathfrak{G}$ und auf $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{L}$ an Stelle von $\mathfrak{L}$ an.

4. Für nichtauflösbare t-Gruppen gibt es eine Kennzeichnung, die methodisch der der Sätze 1 und 2 ähnlich ist. Sie bedient sich der erstmalig wohl von H. Fitting [2] gründlich behandelten Aufspaltungsmöglichkeit jeder endlichen Gruppe in maximalen auflösbaren Normalteiler und zugehörige halbeinfache Faktorgruppe.

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, $\mathfrak{F}$ der maximale auflösbare Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann und nur dann ist $\mathfrak{G}$ eine t-Gruppe, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *$\mathfrak{F}$ ist t-Gruppe,*

(b) *$\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ ist t-Gruppe,*

(c) *Die durch die inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{F}$ induzierten Automorphismen lassen jeden Normalteiler von $\mathfrak{F}$ invariant.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen ist leicht einzusehen. Wir zeigen, daß sie hinreichend sind:

$\mathfrak{N}$ sei ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ Normalteiler von $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{F}\mathfrak{M}/\mathfrak{F}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{F}\mathfrak{N}/\mathfrak{F}$. Nach (b) ist dann $\mathfrak{F}\mathfrak{M}$ und damit auch $\mathfrak{O} = \mathfrak{F}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{O} \cap \mathfrak{F}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$ Normalteiler von $\mathfrak{O} \cap \mathfrak{F}$, $\mathfrak{K}$ also Normalteiler von $\mathfrak{F}$ und nach (c) von $\mathfrak{G}$. Daher ist $\mathfrak{O}/\mathfrak{K}$ direktes Produkt seines maximalen auflösbaren Normalteilers $\mathfrak{O} \cap \mathfrak{F}/\mathfrak{K}$ und der halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{M}/\mathfrak{K} \cong \mathfrak{F}\mathfrak{M}/\mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}$ das Zentrum $\mathfrak{K}$ hat, ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}$ als Kofaktor von $\mathfrak{O} \cap \mathfrak{F}/\mathfrak{K}$ eindeutig bestimmt und daher charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{O}/\mathfrak{K}$. Also ist $\mathfrak{M}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$; w. z. b. w.

Nachdem in Nr. 3 die Struktur der auflösbaren t-Gruppen beschrieben wurde, interessiert jetzt noch die Struktur der halbeinfachen t-Gruppen, wenn man einen groben Überblick über die allgemeinen t-Gruppen erhalten will. Der Arbeit [2] entnimmt man folgendes:

Ist $\mathfrak{G}$ eine halbeinfache t-Gruppe, $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}_1 \times \cdots \times \mathfrak{E}_r$ ihr Sockel[10]), $\mathfrak{E}_i$ eigentlich-einfach[11]), so ist $\mathfrak{G} \cong U_1 \times \cdots \times U_r$, wobei U_i eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{E}_i$ ist, die die Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{E}_i$ umfaßt.

---

[8]) [5], III, § 6.

[9]) [4], Theorem 3.3.

[10]) Der Sockel einer Gruppe ist das Produkt ihrer minimalen Normalteiler.

[11]) eigentlich-einfach = einfach von zusammengesetzter Ordnung.

Eine nähere Diskussion der halbeinfachen t-Gruppen scheitert an dem Mangel an Kenntnissen, die wir von den äußeren Automorphismengruppen eigentlich-einfacher Gruppen haben. Es besteht die bekannte Vermutung von O. Schreier, daß diese stets auflösbar sind. Sie würde gleichbedeutend damit sein, daß eine halbeinfache, perfekte[12]) t-Gruppe direktes Produkt eigentlich-einfacher Gruppen ist.

Die im Satz 5 angegebene Eigenschaft der im maximalen auflösbaren Normalteiler einer t-Gruppe $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{G}$ induzierten Automorphismen gestattet eine eigentümliche Aussage für den maximalen perfekten Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Um sie herzuleiten, benötigen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1[13]). *Λ sei eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe $\mathfrak{H}$, die einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$ und seine Faktorgruppe elementweise invariant lassen. Dann ist Λ abelsch.*

Beweis. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Es sind $H^{\lambda_1}H^{-1}$ und $H^{-1}H^{\lambda_2}$ für $H \in \mathfrak{H}$ Elemente aus $\mathfrak{N}$. Dann ist

$$H^{\lambda_1}H^{-1} = (H^{\lambda_1}H^{-1})^{\lambda_2} = H^{\lambda_2\lambda_1}H^{-\lambda_2},$$
$$H^{-1}H^{\lambda_2} = (H^{-1}H^{\lambda_2})^{\lambda_1} = H^{-\lambda_1}H^{\lambda_1\lambda_2}$$

oder

$$H^{\lambda_2\lambda_1} = H^{\lambda_1}H^{-1}H^{\lambda_2} = H^{\lambda_1\lambda_2},$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 2. *Es sei*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_0 > \mathfrak{N}_1 > \cdots > \mathfrak{N}_l = 1 \tag{4. 1}$$

eine Kompositionsreihe der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{H}$ und M eine Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{H}$, bei denen alle Untergruppen der Reihe (4. 1) invariant bleiben. Dann ist M auflösbar.

Beweis. Der Satz ist richtig für $l = 0$. Sei $l \neq 0$ und M_1 die Untergruppe von M, die $\mathfrak{N}_1$ elementweise invariant läßt. M_1 ist Normalteiler von M. Die Faktorgruppe M/M_1 ist mit einer Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{N}_1$ isomorph, die jedes Glied der durch (4. 1) in $\mathfrak{N}_1$ induzierten Kompositionsreihe invariant läßt. Durch vollständige Induktion nach l ergibt sich: M/M_1 ist auflösbar.

M^1 sei die Untergruppe von M, die $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}_1$ elementweise invariant läßt. M^1 ist Normalteiler von M und M/M^1 mit einer Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}_1$ isomorph, also zyklisch. Daher ist $\mathsf{M}/\mathsf{M}_1 \frown \mathsf{M}^1$ und nach Hilfssatz 1 mit $\Lambda = \mathsf{M}_1 \frown \mathsf{M}^1$ auch Λ und also auch M auflösbar; w. z. b. w.

Satz 7. *$\mathfrak{G}$ sei eine t-Gruppe, $\mathfrak{H}$ auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathsf{Z}_{\mathfrak{H}}$ der Zentralisator von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G}/\mathsf{Z}_{\mathfrak{H}}$ auflösbar.*

Beweis. Die Gruppe der Automorphismen, die durch die inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ induziert werden, sei M. Die Elemente aus M lassen jeden Normalteiler oder, damit gleichwertig, jede nachinvariante Gruppe von $\mathfrak{H}$ fest. $\mathsf{M} \cong \mathfrak{G}/\mathsf{Z}_{\mathfrak{H}}$ erfüllt daher die Bedingungen von Hilfssatz 2 und ist auflösbar.

Satz 8. *$\mathfrak{G}$ sei eine t-Gruppe, $\mathfrak{P}$ der maximale perfekte Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist der Zentralisator $\mathsf{Z}_{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$ gleich dem maximalen auflösbaren Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Insbesondere ist also jede perfekte Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit jedem auflösbaren Normalteiler von $\mathfrak{G}$ elementweise vertauschbar.*

---

[12]) Perfekt nennt man eine Gruppe, die gleich ihrer Kommutatorgruppe ist. Das Erzeugnis perfekter Gruppen ist perfekt. Die Faktorgruppe nach dem hiernach eindeutig bestimmten maximalen perfekten Normalteiler einer Gruppe ist auflösbar.

[13]) Er findet sich als Aufgabe in [5].

Beweis. Allgemein ist $Z_{\mathfrak{P}}$ auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$, da $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ also auch $Z_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}/\mathfrak{P} \cong Z_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P} \cap Z_{\mathfrak{P}}$ auflösbar und $\mathfrak{P} \cap Z_{\mathfrak{P}}$ das Zentrum von $\mathfrak{P}$ ist. Andererseits ist aber $\mathfrak{P}$ nach Satz 7 mit dem maximalen auflösbaren Normalteiler von $\mathfrak{G}$ elementweise vertauschbar; w. z. b. w.

Corollar. *Ist $\mathfrak{G}$ eine perfekte t-Gruppe, so liegt jeder auflösbare Normalteiler von $\mathfrak{G}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$.*

Literatur.

[1] *E. Best* and *O. Taussky*, A class of groups, Proc. Irish Acad. **47** (1942), 55—62.
[2] *H. Fitting*, Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. Jahresber. Dtsch. Math.-Verein. **48** (1938), 77—141.
[3] *B. Huppert*, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math. Z. **60** (1954), 409—434.
[4] *D. R. Taunt*, Remarks on the isomorphism problem in theories of construction of finite groups. Proc. Cambridge Phil. **51** (1955), 16—24.
[5] *H. Zassenhaus*, Lehrbuch der Gruppentheorie, 1. Band, Leipzig u. Berlin 1937.
[6] *G. Zacher*, Ricerche Mat. **1** (1952), 287—294.

Eingegangen 6. Juni 1956.

General theorems about a bounded linear operator and its conjugate.

By *Angus E. Taylor**) and *Charles J. A. Halberg*, Jr., Los Angeles, USA.

Introduction.

The purpose of this paper is to give a complete systematic account of the theorems about a bounded linear operator A and its conjugate A', insofar as these theorems bear on the following questions concerning A, and the corresponding questions concerning A':

Does $Ax = y$ have a solution x for each given y? If not, for which y's does a solution x exist?

Does the operator A have an inverse A^{-1}, and if so, is the inverse operator bounded?

We consider these matters for a bounded linear operator A defined on all of a normed linear space X, with values in a second space Y of the same type. The theorems take into account the possibility of completeness or reflexivity for the spaces, but only insofar as these properties seem to have a decisive bearing on the theorems in question.

Individually, the theorems which we give are not new. We believe, however, that they have never been presented as systematically as they are here, and that their full implications have never been realized to the extent that we present these implications in the two "state diagrams" in § 5. These diagrams exhibit in a readily accessible way all of the implications about one of the operators A, A' which result from an hypothesis about the other one of these two operators, insofar as the hypothesis and the implications bear upon the nine possible situations which may obtain for a given operator, as explained in § 1. As a sample, we mention the following:

Suppose that $y = Ax$ maps the space X onto all of the space Y, and that the mapping is one-to-one, but in such a way that the inverse mapping $x = A^{-1}y$ is not continuous. If neither X nor Y is complete this situation can occur in several ways, and there are three actual possibilities for the conjugate operator A': (1) It may map Y' into a dense but proper subset of X', the inverse mapping $(A')^{-1}$ being discontinuous; (2) it may map Y' into a part of X' not dense in X', the inverse mapping being continuous; (3) it may map Y' into a part of X' not dense in X', the inverse mapping being discontinuous. There are no other possibilities. Possibilities (1) and (3) are not realized if Y is complete. Possibility (2) is not realized if X is complete, but may be realized if Y is complete. Possibility (3) is not realized if X is reflexive, regardless of the completeness of Y.

There are eleven main theorems, which are given in §§ 3, 4. The full implications of these theorems are presented in § 5, in connection with the two state diagrams. Section 6 is devoted to examples which demonstrate the actual occurrence of various states which are not shown to be impossible in § 5. Sections 7 and 8 present briefly the special implications of the earlier material for the spectra of A and A' and for operators in Hilbert space.

*) Part of the work done on this paper by Professor Taylor was carried on while he was a Fulbright Research Fellow visiting at the Johannes Gutenberg University in Mainz, Federal Republic of Germany.

1. The 9-fold classification scheme for an operator.

Throughout this paper we shall use X and Y to denote normed linear spaces. The class of all bounded (i. e. continuous) linear operators defined on all of X, with ranges in Y, is denoted by $[X, Y]$. If A is such an operator we denote its range by $\mathfrak{R}(A)$. We say that A has an inverse if $Ax = 0$ implies $x = 0$, i. e. if A sets up a 1-1 mapping of X onto $\mathfrak{R}(A)$. The inverse mapping A^{-1} is then a linear operator which maps $\mathfrak{R}(A)$ onto X.

As regards $\mathfrak{R}(A)$ there are the following three possibilities:

I: $\mathfrak{R}(A) = Y$,

II: $\mathfrak{R}(A) \neq Y$ but $\mathfrak{R}(A)$ is dense in Y,

III: $\mathfrak{R}(A)$ is not dense in Y, i. e. $\overline{\mathfrak{R}(A)} \neq Y$.

If $\mathfrak{R}(A) = Y$ for a given A, we say that A is in condition I; for brevity we write $A \in \mathrm{I}$. Analogous terminology and notation is used regarding II and III.

As regards A^{-1} there are the following three possibilities:

1: A^{-1} exists and is continuous,

2: A^{-1} exists but is not continuous,

3: A^{-1} does not exist.

Here we say that A is in condition 1, and write $A \in 1$, to indicate that A^{-1} exists and is continuous, with analogous usage concerning the second and third possibilities.

As is well known, $A \in 1$ if and only if there is a positive constant C such that $\| Ax \| \geqq C \| x \|$ for every x in X.

By combining various possibilities from the two lists, we obtain nine possible conditions. If $A \in \mathrm{I}$ and $A \in 1$, we say that A in condition I_1, and write $A \in \mathrm{I}_1$. Likewise $A \in \mathrm{II}$ and $A \in 3$ is expressed by writing $A \in \mathrm{II}_3$. Thus we have nine possible conditions corresponding to the various pairings of a I, II or III with a 1, 2 or 3.

2. The state of an operator and its conjugate.

If X is a normed linear space we denote the space of all continuous linear functionals on X by X'. We understand that the functionals have values in the same scalar field as that associated with X. For our purposes it makes no difference whether we deal with the real field or the complex field, and we shall hereafter make no specific reference to the scalar field. We regard X' as a normed linear space in the usual way. Although X need not be complete, X' is necessarily complete.

If $A \in [X, Y]$, the conjugate operator A' is defined as follows: For $y' \in Y'$ we write $x' = A'y'$, where x' is the element of X' defined by

$$x'(x) = y'(Ax), \; x \in X. \tag{2.1}$$

As is well known, $A' \in [Y', X']$, and $\| A' \| = \| A \|$.

The nine-fold classification scheme of § 1 may be applied to A'. That is, we can consider whether $\mathfrak{R}(A')$ is all of X', dense in X' but not all of X', or not dense in X'; we can also consider whether or not A' has an inverse, and if it does, whether or not the inverse is continuous.

If we now consider the ordered pair of operators A, A', the condition of A and the condition of A' gives us an ordered pair of conditions which we call the *state* of the pair

(A, A'). Thus, if $A \in \mathrm{II}_3$ and $A' \in \mathrm{III}_1$, we say that the state of (A, A') is $(\mathrm{II}_3, \mathrm{III}_1)$; for this we may write $(A, A') \in (\mathrm{II}_3, \mathrm{III}_1)$. Now it is a priori conceivable that (A, A') may be in any one of 81 states. But, in fact, a great many states are made impossible by several general theorems. The fact is that there are exactly 16 states which are actually possible for a pair (A, A') if no additional assumptions are made about X, Y or A. Restrictions on some or all of X, Y, A may limit still further the states which may be attained by (A, A'). For example, there are exactly 9 states which are actually possible if X and Y are required to be Banach spaces; the number of actually possible states drops to 7 if we require X to be reflexive and Y to be complete. Examples of such states can be found even when Y is reflexive, in fact even when $X = Y$.

In the following sections of this paper we analyze the implications for the condition of A' of an assumption about the condition of A, and vice versa. To a considerable extent, this analysis involves merely the proper formulation of known facts in the theory of linear operators. We believe, however, that all of the relevant information has never before been brought together in as general a form as given here, and that the full implications of all the information has not hitherto been assessed. In order to show that assumptions of completeness or reflexivity for X or Y (or both) cannot yield any further limitations on the possible states of (A, A') beyond those discussed in this paper, we give in § 6 a number of counterexamples showing that various states can be realized under certain specified conditions.

3. Annihilators and null manifolds.

If S is a subset of X we denote by S^0 the set of all x' in X' such that $x'(x) = 0$ if $x \in S$. We call S^0 the annihilator of S in X'. Evidently $S_1 \subset S_2$ implies $S_2^0 \subset S_1^0$. The set S^0 is a closed linear manifold in X'. If S_1 and S_2 generate the same closed linear manifold M in X, then $S_1^0 = S_2^0 = M^0$.

For a subset S in the conjugate space X' we define ${}^0S$ as the set of all $x \in X$ such that $x'(x) = 0$ if $x' \in S$. We call ${}^0S$ the annihilator of S in X. Remarks analogous to those of the preceding paragraph apply here.

The null manifold of A, denoted by $\mathfrak{N}(A)$, is the set of all $x \in X$ such that $Ax = 0$; $\mathfrak{N}(A)$ is a closed linear manifold in X. The null manifold of A', denoted by $\mathfrak{N}(A')$, is the closed linear manifold in Y' consisting of all y' such that $A'y' = 0$. Since

$$(A'y')(x) = y'(Ax) \quad \text{(by the definition (2. 1))},$$

it is apparent that $y' \in \mathfrak{N}(A')$ is equivalent to the condition $y'(Ax) = 0$ for every x in X. This is the same as saying that $y' \in \mathfrak{N}(A)^0$. Since $\mathfrak{N}(A)$ and $\overline{\mathfrak{N}(A)}$ have the same annihilator in Y', we see that

$$(3.1) \qquad (\overline{\mathfrak{N}(A)})^0 = \mathfrak{N}(A').$$

At this point we observe that if M is a closed linear manifold in X, then

$$(3.2) \qquad {}^0(M^0) = M.$$

It is evident by the definitions that $M \subset {}^0(M^0)$. But there can be no element in ${}^0(M^0) - M$. For if x_1 were such an element, the fact that $x_1 \notin M$ would imply the existence of a linear functional x' such that $x'(x_1) \neq 0$ and $x' \in M^0$. But then $x_1 \in {}^0(M^0)$ would imply $x'(x_1) = 0$. Therefore (3. 2) is true.

Applying (3. 2) to $\overline{\mathfrak{N}(A)}$ and (3. 1), we obtain

$$(3.3) \qquad \overline{\mathfrak{N}(A)} = {}^0\mathfrak{N}(A').$$

This result enables us to state our first theorem.

Theorem 1. $\overline{\mathfrak{R}(A)} = Y$ *if and only if* $(A')^{-1}$ *exists.*

Proof. According to (3. 3) $\overline{\mathfrak{R}(A)} = Y$ if and only if $Y = {}^0\mathfrak{N}(A')$. This in turn is evidently equivalent to the requirement that $\mathfrak{N}(A')$ consist solely of the zero functional in Y', which is the same as saying that the inverse of A' exists.

Next we observe that

$$(3.4) \qquad {}^0(\overline{\mathfrak{R}(A')}) = \mathfrak{N}(A).$$

Since $\mathfrak{R}(A')$ and its closure have the same annihilator in X, it is sufficient to prove that ${}^0\mathfrak{R}(A') = \mathfrak{N}(A)$. This follows from the formula $(A'y')(x) = y'(Ax)$ by observing that $x \in \mathfrak{N}(A)$ if and only if $y'(Ax) = 0$ for every y' in Y'.

It follows from (3. 4) that

$$(3.5) \qquad \overline{\mathfrak{R}(A')} \subset \mathfrak{N}(A)^0,$$

for if M is any linear manifold in X', it is evident that $M \subset ({}^0M)^0$. We cannot assert that $M = ({}^0M)^0$, however; there exist closed linear manifolds M for which this is not true. In fact, $M = ({}^0M)^0$ is the condition which characterizes those subspaces of X' which are called *regularly closed* by Banach (see [1], p. 116). However, it is easily proved that $M = ({}^0M)^0$ for every closed linear manifold M in X', provided that X is reflexive. Thus, we have

$$(3.6) \qquad \overline{\mathfrak{R}(A')} = \mathfrak{N}(A)^0$$

in the event that X is reflexive.

Theorem 2. *If* $\overline{\mathfrak{R}(A')} = X'$, *the inverse* A^{-1} *exists.*

Proof. $\overline{\mathfrak{R}(A')} = X'$ and (3. 5) imply that $\mathfrak{N}(A)^0 = X'$, and this implies that $\mathfrak{N}(A)$ consists solely of the zero vector, whence A^{-1} exists.

Theorem 3. *If the inverse* A^{-1} *exists, it follows that* $\overline{\mathfrak{R}(A')} = X'$, *provided that* X *is reflexive.*

Proof. This follows from (3. 6), which holds if X is reflexive.

4. Continuous inverses.

The theorems of this section go somewhat deeper than those of § 3.

Theorem 4. $\mathfrak{R}(A') = X'$ *if and only if* A *has a continuous inverse.*

Proof. Suppose $\mathfrak{R}(A') = X'$, and that A does not have a continuous inverse. Then there is a sequence $\{x_n\}$ such that $x_n \neq 0$ and $\| Ax_n \| / \| x_n \| \to 0$. Let

$$\alpha_n = \max\left\{\left(\frac{\| Ax_n \|}{\| x_n \|}\right)^{1/2}, n^{-1/2}\right\}, \quad u_n = \frac{x_n}{\alpha_n \| x_n \|}.$$

Then $\| u_n \| = \dfrac{1}{\alpha_n} \to \infty$, and $\| Au_n \| \to 0$, for

$$\| Au_n \| \leqq \left(\frac{\| Ax_n \|}{\| x_n \|}\right)^{1/2}.$$

Now $Au_n \to 0$ implies $y'(Au_n) \to 0$ for each $y' \in Y'$. But $y'(Au_n) = (A'y')(u_n)$, and since $\mathfrak{R}(A') = X'$, we conclude that $x'(u_n) \to 0$ for each $x' \in X'$. This latter situation, however, implies that the sequence $\{u_n\}$ is bounded. See for example, Banach [1], p. 80, Th. 6 or Hille [4], p. 26, Th. 2. 12. 3. Since $\| u_n \| \to \infty$, we have a contradiction.

If we suppose, conversely, that A^{-1} exists and is continuous, $x'(A^{-1}y)$ defines a continuous linear functional on $\mathfrak{R}(A)$ (x' fixed in X', y varying over $\mathfrak{R}(A)$). By the extension theorem for linear functionals there exists an element y' in Y' such that $y'(y) = x'(A^{-1}y)$ when $y \in \mathfrak{R}(A)$. Then $y'(Ax) = x'(x)$ if $x \in X$. This means that $x' = A'y'$. Consequently $x' \in \mathfrak{R}(A')$, i. e. $\mathfrak{R}(A') = X'$.

Theorem 5. *Suppose that Y is complete and that $\mathfrak{R}(A) = Y$. Then A' has a continuous inverse.*

Proof. The argument is much like that in the first part of the proof of Theorem 3. If A' did not have a continuous inverse, there would exist a sequence $\{y_n'\}$ in Y' such that $\| y_n' \| \to \infty$ and $\| A'y_n' \| \to 0$. But $\mathfrak{R}(A) = Y$ would then imply that $y_n'(y) \to 0$ for each y in Y, and this, with the completeness of Y, would imply the boundedness of $\{\| y_n' \|\}$. See Banach, [1] p. 80, Th. 5 or Hille [4], p. 26, Th. 2. 12. 2.

Before discussing the next theorem we must mention some facts about convex sets and linear functionals. A set K in X is called *balanced* if $x \in K$ and $|\alpha| \leqq 1$ imply $\alpha x \in K$. If the scalars are real, a *convex* set K is balanced if and only if it is symmetric (i. e. $-x \in K$ whenever $x \in K$). We need the following result: Suppose that K is a closed, convex, balanced set having 0 as an interior point. Let x_0 be on the boundary of K. Then there exists an element $x' \in X'$ such that $x'(x_0) = 1$ and $|x'(x)| \leqq 1$ if $x \in K$. This is proved by applying standard extension theorems for linear functionals, using the Minkowski functional of K. See Zaanen [5], p. 285, Th. 2, or Bourbaki [2], p. 102, Corollaire 2.

Theorem 6. *Suppose that X is complete and that A' has a continuous inverse. Then $\mathfrak{R}(A) = Y$. Moreover, Y is necessarily complete.*

Proof. For each positive α let B_α be the set of x in X such that $\| x \| \leqq \alpha$. We shall first prove that the set $\overline{A(B_\alpha)}$ contains a neighborhood of 0 in the space Y. This part of the argument does not require X to be complete. We observe that B_α is balanced and convex; hence the same is true of $A(B_\alpha)$ and $\overline{A(B_\alpha)}$. Suppose that, for some positive α, $A(B_\alpha)$ does not contain a neighborhood of 0 in Y. Then there exists a sequence $\{y_n\}$ such that $y_n \to 0$ and $y_n \notin \overline{A(B_\alpha)}$. Let d_n be the distance between $\overline{A(B_\alpha)}$ and y_n. If $y_0 \in \overline{A(B_\alpha)}$, consider that the closed sphere $\left\{y \mid \| y - y_0 \| \leqq \frac{d_n}{2}\right\}$ and (for a fixed n) the union S_n of all such spheres corresponding to all choices of y_0. Let $V_n = \overline{S_n}$. A simple argument using the convexity of $\overline{A(B_\alpha)}$, shows that S_n, and therefore also V_n, is convex. Likewise V_n is balanced. Since $0 \in A(B_\alpha)$, 0 is a possible choice for y_0, and therefore 0 is an interior point of V_n. Let ε_n be the largest positive value of ε such that $\varepsilon y_n \in V_n$. Then $\varepsilon_n < 1$ and $\varepsilon_n y_n$ is on the boundary of V_n. Let y' be an element of Y' such that $y'(\varepsilon_n y_n) = 1$ and $|y'(y)| \leqq 1$ if $y \in V_n$. Such a y' exists; see the paragraph preceding the statement of Theorem 5. In particular, since $A(B_\alpha) \subset V_n$, $|y'(Ax)| \leqq 1$ if $\| x \| \leqq \alpha$, and therefore $|y'(Ax)| \leqq \alpha^{-1}$ if $\| x \| \leqq 1$. The formula $y'(Ax) = (A'y')(x)$ then shows that $\| A'y' \| \leqq \alpha^{-1}$. Since $(A')^{-1}$ exists and is continuous, there is some $m > 0$ such that $\| (A')^{-1}x' \| \leqq m \| x' \|$ if $x' \in \mathfrak{R}(A')$. If $x' = A'y'$ we infer that $\| y' \| \leqq m\alpha^{-1}$. Then

$$1 = y'(\varepsilon_n y_n) \leqq \| y' \| \, \| \varepsilon_n y_n \| \leqq m\alpha^{-1} \| y_n \|, \text{ or } \| y_n \| \geqq \alpha m^{-1}.$$

This contradicts the fact that $y_n \to 0$. Consequently $\overline{A(B_\alpha)}$ contains a neighborhood of 0. It follows that there is some $\beta > 0$ such that $y \in \overline{A(B_\alpha)}$ if $\| y \| \leqq \beta$. Choose α successively equal to $1, 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots$ and let $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots$ denote corresponding values of β. Pick $y_0 \in Y$ so that $\| y_0 \| \leqq \beta_0$. Then $y_0 \in \overline{A(B_\alpha)}$ for $\alpha = 1$, and hence there exists an element $y_1 = Ax_1$, with $\| x_1 \| \leqq 1$, such that $\| y_0 - y_1 \| \leqq \beta_1$. This implies $y_0 - y_1 \in \overline{A(B_\alpha)}$

with $\alpha = 2^{-1}$. By induction we obtain elements $y_n = Ax_n$, with $\| x_n \| \leqq 2^{-(n-1)}$, such that $\| y_0 - y_1 - \cdots - y_n \| \leqq \beta_n$ and hence $y_0 - y_1 - \cdots - y_n \in \overline{A(B_\alpha)}$ with $\alpha = 2^{-n}$. Now $\| Ax \| \leqq \| A \| \alpha$ if $\| x \| \leqq \alpha$. Thus $\| y \| \leqq \| A \| \alpha$ if $y \in \overline{A(B_\alpha)}$. This shows that $\beta_n \to 0$, and hence that

$$y_0 = \sum_1^\infty y_n.$$

Since X is complete and $\sum_1^\infty \| x_n \|$ is convergent, the series $\sum_1^\infty x_n$ converges and defines an element x_0 in X. Moreover,

$$Ax_0 = \sum_1^\infty Ax_n = y_0.$$

This shows that every y for which $\| y \| \leqq \beta_0$ is in $\mathfrak{R}(A)$; it follows by homogeneity that $Y = \mathfrak{R}(A)$.

It remains to prove that Y is complete. Let Y be the completion of Y, so that $\hat{Y}$ is a complete space having Y as an everywhere dense subspace. Define $\hat{A}x = Ax$ if $x \in X$, and regard $\hat{A}$ as a member of $[X, Y]$. It is well known that we can identify $(\hat{Y})'$ with Y'; hence we can identify A' and $(\hat{A})'$. It follows that $(\hat{A})'$ has a continuous inverse, and so, by what has already been proved, we know that $\mathfrak{R}(\hat{A}) = \hat{Y}$. But $\mathfrak{R}(\hat{A}) = \mathfrak{R}(A)$, and so $\hat{Y} = Y$. Thus Y is complete.

Theorem 7. *Suppose that X and Y are complete, and suppose* (a) $\mathfrak{R}(A) = Y$ *and* (b) A^{-1} *exists. Then A^{-1} is continuous.*

This is a well-known theorem, and we omit the proof. See Banach [1], p. 41, Th. 5; Hille [4], p. 29, Corollary.

Theorem 8. *Suppose that X is complete and that A' has a continuous inverse. Then $\mathfrak{R}(A) = Y$, and A^{-1} is continuous if it exists.*

Proof. This is a combination of Theorems 6 and 7.

Theorem 9. *Suppose that $\mathfrak{R}(A') = X'$ and that A' has an inverse. Then this inverse is continuous.*

This is an application of Theorem 7 with A', Y', X' in place of A, X, Y. We recall that X' and Y' are complete even if X and Y are not.

Theorem 10. *Suppose that X is complete and that A has a continuous inverse. Then $\mathfrak{R}(A)$ is closed.*

Proof. Suppose $y_n \in \mathfrak{R}(A)$ and $y_n \to y$. We can write $y_n = Ax_n$, $x_n = A^{-1}y_n$. Then the continuity of A^{-1} enables us to infer that $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence. Since X is complete, we have $x_n \to x$, where $x \in X$. Then $y_n = Ax_n \to Ax$, and so $y = Ax$. This shows that $y \in \mathfrak{R}(A)$, and so $\mathfrak{R}(A)$ is closed.

Theorem 11. *If A' has a continuous inverse, $\mathfrak{R}(A')$ is closed. Consequently, under these conditions $\overline{\mathfrak{R}(A')} = X'$ implies that $\mathfrak{R}(A') = X'$.*

Proof. This is a direct application of Theorem 10, because Y' is complete.

5. The state diagram for pairs (A, A').

In § 2 we explained the concept of the state of a pair (A, A'). The theorems of §§ 3 and 4 show that certain states never occur. For example, Theorem 1 assert that A is in one of the conditions 1, II if and only if A' is in one of the conditions 1, 2. Thus, no state with $A' \in 3$ and $A \in$ I or II can occur, and no state with $A \in$ III and $A' \in 1$ or 2

can occur. To exhibit these facts in a convenient way we construct what we shall call a "state diagram" as follows: Make a large square and divide it into 81 congruent small squares. Each small square can then be used to represent a conceivable state of (A, A'), by a scheme which is much like the assignment of rectangular coordinates to a point in the xy-plane. All states corresponding to a given condition for A, e. g. II_2, will be arranged in a *column* labelled II_2 at the bottom; and all states corresponding to a given condition for A', e. g. III_1, will be arranged in a given *row* labelled III_1 at the left. If the occurrence of a particular state is ruled out by the statement of one of the theorems, this fact is indicated by putting the number of the theorem in the square. Thus, the square representing the state $(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_3)$ will have the number 1 in it. We follow this policy for each of the eleven theorems in §§ 3, 4. The result is the first state diagram reproduced herewith. Immediately following the diagram we place a list showing assumptions of completeness or reflexivity required for certain of the theorems. If a number does not appear in this list it means that the corresponding theorem is valid with no restrictions on X or Y.

First State Diagram

A' \ A	I_1	I_2	I_3	II_1	II_2	II_3	III_1	III_2	III_3
III_3	1, 3 4, 5	1, 3 5, 7	1, 5	1, 3 4, 10	1, 3	1	3, 4	3	
III_2	3, 4 5	3, 5 7	5	3, 4 10	3		1, 3 4	1, 3	1
III_1	3, 4	3, 7 8		3, 4, 6 8, 10	3, 6 8	6, 8	1, 3, 4 6, 8	1, 3 6, 8	1, 6 8
II_3	1, 4 5	1, 5 7	1, 2 5	1, 4 10	1	1, 2	4		2
II_2	4, 5	5, 7	2, 5	4, 10		2	1, 4	1	1, 2
II_1	4, 11	7, 8 11	2, 11	4, 6, 8 10, 11	6, 8 11	2, 6 8, 11	1, 4, 6 8, 11	1, 6 8, 11	1, 2, 6 8, 11
I_3	1, 5	1, 4 5, 7	1, 2 4, 5	1, 10	1, 4	1, 2 4		4	2, 4
I_2	5, 9	4, 5 7, 9	2, 4 5, 9	9, 10	4, 9	2, 4 9	1, 9	1, 4 9	1, 2 4, 9
I_1		4, 7 8	2, 4	6, 8 10	4, 6 8	2, 4 6, 8	1, 6 8	1, 4 6, 8	1,2 4, 6, 8

3: X must be reflexive.
5: Y must be complete.
6, 8 and 10: X must be complete.
7: X and Y must both be complete.

For a quick visual perception of the effect of theorems which do not require X or Y to be complete, we make a second state diagram in which a square is crossed out by its diagonals if at least one of the numbers 1, 2, 4, 9, 11 appears in the square in the first state diagram. This indicates that the state in question can never occur, regardless of

completeness or reflexivity assumptions. Next, as regards the remaining squares, we place the letter X in one of these squares if one of the numbers 6, 8, 10 appears in that square in the first state diagram. This indicates that the state in question cannot occur if X is complete. Likewise we place a Y in a square if the number 5 appears there in the first state diagram, thus indicating that the state cannot occur if Y is complete. Finally, we place $X - R$ in a square to indicate that the state cannot occur if X is reflexive. This will be when the number 3 appears in the square in the first state diagram.

Second State Diagram

A' \ A	I_1	I_2	I_3	II_1	II_2	II_3	III_1	III_2	III_3
III_3								$X-R$	
III_2		Y $X-R$	Y		$X-R$				
III_1		X			X	X			
II_3									
II_2		Y							
II_1									
I_3									
I_2									
I_1				X					

X: Can't occur if X is complete.
Y: Can't occur if Y is complete.
X—R: Can't occur if X is reflexive.

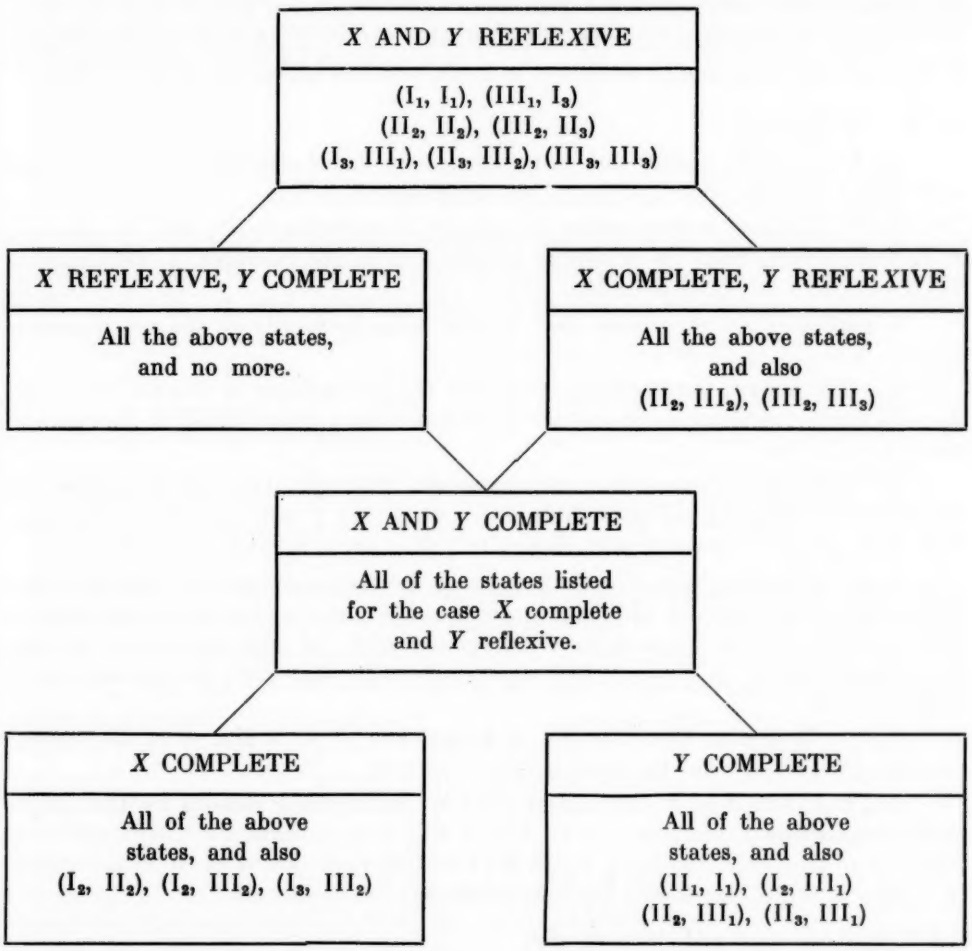
Many implications can be read from the state diagrams. For the present we mention the following: If $A \in \mathrm{I}_1$ or $A \in \mathrm{II}_1$ then $A' \in \mathrm{I}_1$, and conversely. In other words, $\mathfrak{R}(A') = X'$ *and A' has a continuous inverse if and only if* $\overline{\mathfrak{R}(A)} = Y$ *and A has a continuous inverse.* If X is complete this statement can be modified by writing $\mathfrak{R}(A) = Y$ in place of $\overline{\mathfrak{R}(A)} = Y$. So we can say: A Banach space X and a normed linear space Y are linearly homeomorphic if and only if X' and Y' are linearly homeomorphic. In this situation, of course, Y must necessarily also be a Banach space (i. e. complete).

The question now arises as to whether a state can actually occur if the corresponding square has no number in it. More generally, we can inquire as to whether there exist any more theorems of the general sort represented in Theorems 1—11, which would have the effect of proving the non-occurrence of a state not already shown by the diagram to be

impossible under the same hypotheses. At this juncture the only special hypotheses which we consider are those of completeness or reflexivity. The answer to this query is in the negative, as we show in the next section of the paper by the exhibition of examples demonstrating the realization of various states.

An assumption that Y is reflexive has played no part in the Theorems 1—11. Indeed, the assumption that Y is reflexive does not imply the non-occurrence of any states whose non-occurrence is not already implied by assuming that Y is merely complete. This assertion is justified by the examples to be given in the next section.

States which can occur



In order to exhibit clearly the complete listing of states which can occur under certain conditions, we present the foregoing chart. The entries are found by examining the state diagram, and are fully justified by the examples in § 6.

No state occurs with X and Y both incomplete that does not also occur with at least one of the two spaces complete.

6. Examples of states.

In this section examples of states will be given to justify the chart of Section 5.

Most of our examples will be given by operators on the sequence spaces l^p, $1 \leqq p < \infty$, $m = l^\infty$ and c_0. It is well known that $(l^p)'$, the conjugate space of l^p, is congruent to $l^{p'}$, where $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ and $1 < p < \infty$, whence the l^p spaces, $1 < p < \infty$, are reflexive. It is also well known that $(l^1)'$ is congruent to $l^\infty = m$, that $(c_0)'$ is congruent to l^1 and that neither l^1 nor c_0 is reflexive. We shall identify $(l^p)'$ with $l^{p'}$, $(l^1)'$ with l^∞ and $(c_0)'$ with l^1.

We shall have need of the following facts concerning operators defined on the sequence spaces by infinite matrices. (We abbreviate the notation $A \in [X, X]$ to $A \in [X]$.)

(a) An infinite matrix (a_{ij}) defines an operator $A \in [l^1]$ if and only if the supremum of the l^1 norms of its column sequences is finite, and this supremum is $\| A \|$. That is, $\| A \| = \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} | a_{ij} |$.

(b) If an infinite matrix and its transpose both define elements of $[l^1]$, then they both define elements of $[l^p]$, $1 \leqq p \leqq \infty$. (Halberg [3], p. 55).

(c) If an infinite matrix defines an operator A belonging to $[l^1]$, $[l^p]$, $1 < p < \infty$, or c_0 respectively, then its transpose matrix defines the operator A' belonging to $[m] = [l^\infty]$, $[l^{p'}]$ or $[l^1]$ respectively.

A particular set of vectors that will be used frequently is the set y_i, where $y_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $y_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, etc.

We shall reserve the symbol y_n to denote the nth member of this set. It is clear that the linear combinations of this set of vectors form a dense subset of the space l^p, where $1 \leqq p < \infty$.

We shall first show that the state $(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$, $(\mathrm{II}_2, \mathrm{II}_2)$, $(\mathrm{III}_3, \mathrm{III}_3)$, $(\mathrm{I}_3, \mathrm{III}_1)$, $(\mathrm{III}_1, \mathrm{I}_3)$, $(\mathrm{II}_3, \mathrm{III}_2)$ and $(\mathrm{III}_2, \mathrm{II}_3)$ are all possible with both X and Y reflexive. (Note that these form a set of states symmetric with respect to a diagonal in the state diagram.)

In the exhibition of several of these states, we shall show that in addition to the state being possible when X and Y are l^p spaces with $1 < p < \infty$, the state is also possible when one or each of the spaces is one of the spaces l^1 or l^∞. In such a case, it is clear that if we require that $1 < p < \infty$, we have an example of the state with the spaces X and Y both reflexive.

$(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$: It is clear that if we let X be reflexive, $Y = X$ and A be the identity operator, then (A, A') has the state $(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$.

$(\mathrm{II}_2, \mathrm{II}_2)$: Let $X = Y = l^2$ and $A \in [l^2]$ be the operator defined by the infinite matrix (a_{ij}) where

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } | i - j | = 1 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

If $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l^2$ and $Ax = 0$, then

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_2, \\ \xi_{2n} &= -\xi_{2n+2}, \quad n = 1, 2, 3 \cdots, \\ \xi_{2n-1} &= -\xi_{2n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

whence we see that $\xi_n = 0$ for all n, since necessarily $\lim_{n \to \infty} \xi_{2n+1} = 0$. Thus it is clear that A^{-1} exists. However A^{-1} is not continuous, as we now show by exhibiting a

sequence of vectors $\{x_n\}$ such that $\| x_n \| \to \infty$ and $\| Ax_n \| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Let $x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots)$, where $\xi_{n(2k)} = 0$ for $k = 1, 2, \ldots$,

$$\xi_{n(2k-1)} = \begin{cases} (-1)^k \text{ if } k \leqq n, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

If $Ax_n = (\eta_{n1}, \eta_{n2}, \ldots)$, we see that

$$\eta_{nm} = \begin{cases} (-1)^n \text{ if } m = 2n, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Thus $\| x_n \| = \sqrt{n}$ and $\| Ax_n \| = 1$, and we can conclude that $A \in 2$. The range of A is not all of l^2, for it can be shown that $y_n \in \mathfrak{R}(A)$ if n is even, but $y_n \notin \mathfrak{R}(A)$ if n is odd. For example $y_1 \notin \mathfrak{R}(A)$, since if it were there would exist an $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l^2$ for which $Ax = y_1$, whence we would conclude that

$$\begin{aligned} 1 &= \xi_2 \\ 0 &= \xi_2 + \xi_4 \\ &\cdots \\ 0 &= \xi_{2k} + \xi_{2(k+1)} \end{aligned}$$

and thus $| \xi_{2k} | = 1$ for all k, contradicting our assumption that $x \in l^2$. The range of A is dense in l^2 however. From what has been said above it is sufficient to show that all of the y_k, k odd, are limit points of $\mathfrak{R}(A)$. To do this we consider y_{2l-2}. If we define $z_n \in l^2$ by $z_n = (\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \ldots)$ where

$$\varphi_{nk} = \begin{cases} (-1)^m \left(1 - \dfrac{m}{2^n}\right) \text{ if } k = 2(l+m),\ m = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

we see that $\| Az_n - y_{2l-1} \| = 2^{-n/2}$, whence

$$\lim_{n \to \infty} Az_n = y_{2l-1}.$$

This fact combined with our earlier result leads us to the conclusion that $A \in \mathrm{II}_2$, which together with the fact that $(l^2)' = l^2$ and that A is defined by a symmetric matrix implies that (A, A') has the state $(\mathrm{II}_2, \mathrm{II}_2)$.

$(\mathrm{III}_3, \mathrm{III}_3)$: Let $X = Y = l^p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, and $A \in [l^p]$ be defined by the infinite matrix (a_{ij}) where

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } i = j \geqq 2 \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

It is clear that $A \in 3$, since if $x \in l^p$ and $x = (\xi_1, 0, 0, \ldots)$, where $\xi_1 \neq 0$, then x is an eigenvector of A. It is also clear that $A \in \mathrm{III}$, for if $y \in \mathfrak{R}(A)$, then y is of the form $y = (0, \eta_2, \eta_3, \ldots)$. Inspection of the state diagram shows that since $A \in \mathrm{III}_3$, A' necessarily belongs to III_3.

$(\mathrm{I}_3, \mathrm{III}_1)$: Let $X = Y = l^p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, and let $A \in [l^p]$ be defined by the infinite matrix (a_{ij}), where

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } j - i = 1 \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

If $x = (\xi_1, 0, 0, 0, \ldots)$, $\xi_1 \neq 0$, we see that x is an eigenvector of A, whence $A \in 3$. Given any $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l^p$ it is clear that $x_0 = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots) \in l^p$ and $Ax_0 = x$,

from which we conclude that $A \in \mathrm{I}$. Inspection of the state diagram shows us that A' is necessarily an element of III_1.

$(\mathrm{III}_1, \mathrm{I}_3)$: It is clear from the foregoing remarks that if we let $X = Y = l^p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, and $B \in [l^p]$ be the operator defined by the transpose of the matrix defining the operator A of the preceding example, then $B' \in \mathrm{I}_3$ and $B \in \mathrm{III}_1$.

$(\mathrm{II}_3, \mathrm{III}_2)$: Let $X = Y = l^p$, $1 \leqq p < \infty$, and let $A \in [l^p]$ be defined by the infinite matrix (a_{ij}), where

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{i-1}} & \text{if } j \geqq 2 \text{ and } i - j \geqq -1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If x is any vector of the form $x = (\xi_1, 0, 0, \ldots)$, $\xi_1 \neq 0$, then x is an eigenvector of A, and $A \in 3$. It is easy to see that $\mathfrak{R}(A)$ is dense in X, as we now demonstrate by showing that all y_m belong to the range of A. To this end let $x_m = (\xi_{m1}, \xi_{m2}, \ldots) \in l^p$ be defined by

$$\xi_{mk} = \begin{cases} 2^{m-1} & \text{if } k = m + 1, \\ -2^{m-1} & \text{if } k = m + 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

By inspection we see that $Ax_m = y_m$. But the range of A is not all of l^p, since $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots) \in l^p$ defined by

$$\eta_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k-1}} & \text{if } n = 2k \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

does not belong to $\mathfrak{R}(A)$. For, assume $y \in \mathfrak{R}(A)$; then there exists an $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l^p$ for which $Ax = y$, whence

$$\eta_{2k-1} = \quad 0 \quad = \frac{1}{2^{2k-2}} (\xi_2 + \xi_3 + \cdots + \xi_{2k})$$

and

$$\eta_{2k} = \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{2k-1}} (\xi_2 + \xi_3 + \cdots + \xi_{2k} + \xi_{2k+1})$$

which implies that $\xi_{2k+1} = 2^k$ for all k, contradicting our assumption that $x \in l^p$, $1 \leqq p < \infty$. From these facts we conclude that $A \in \mathrm{II}_3$, and inspection of the state diagram shows that (A, A') must be in the state $(\mathrm{II}_3, \mathrm{III}_2)$.

$(\mathrm{III}_2, \mathrm{II}_3)$: Let $X = Y = l^p$, $1 < p < \infty$, and let $B \in [l^p]$ be the operator defined by the transpose of the matrix defining the operator A of the example $(\mathrm{II}_3, \mathrm{III}_2)$. The reflexivity of l^p and the results of the last example together with an inspection of the state diagram force us to conclude that (B, B') is in the state $(\mathrm{III}_2, \mathrm{II}_3)$.

We have now given examples of all seven of the states possible with X and Y reflexive. These obviously also give us examples of the situation where X is reflexive and Y is complete. That no new states are possible under this weakened hypothesis on Y is evident from a study of the state diagram. The examples just given also afford us illustrations of these states with X complete and Y reflexive. Under these hypotheses, however, two new states are possible, namely the states $(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_2)$ and $(\mathrm{III}_2, \mathrm{III}_3)$, as we now demonstrate.

$(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_2)$: Let $X = l^1$, $Y = l^p$ and $A \in [l^1, l^p]$, $1 < p < \infty$, where A is defined by the infinite matrix (a_{ij}),

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{i-1}} & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is evident that $A \in \mathrm{II}$ since $Al^1 \subset l^1 \neq l^p$, but clearly all vectors y_m belong to the range of A, whence $\overline{\mathfrak{R}(A)} = l^p$. It is obvious that A does not belong to 3. To see that $A \in 2$ we need only consider the sequence $\{Ay_m\}$, for it is clear that $\| y_m \| = 1$ for all m and that $\lim_{m \to \infty} \| Ay_m \| = 0$. It is not difficult to show that $A' \in [l^{p'}, l^\infty]$ (A' is of course defined by the same matrix as A) maps l^∞ into l^1, for if $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ and $A'x = y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$, then $|\eta_n| \leqq \frac{\sup_i |\xi_i|}{2^{n-1}}$. Therefore $\overline{A'l^p} \neq l^\infty$ for any p. The argument to show that $A' \in 2$ is the same as that employed to show that $A \in 2$. Thus, since $1 < p < \infty$, we see that (A, A') has the state $(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_2)$, with X complete but not reflexive and with Y reflexive.

$(\mathrm{III}_2, \mathrm{III}_3)$: Let $X = l^1$, $Y = l^p$ and $A \in [l^1, l^p]$ be defined by the infinite matrix (a_{ij}), where

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2^{i-1}} & \text{if } i = j + 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Since the range of A clearly contains only vectors of the form $x = (0, \xi_2, \xi_3, \ldots)$, $A \in \mathrm{III}$. It is obvious that $A \notin 3$, and an argument identical to that used for the preceding example shows that $A \in 2$. The operator $A' \in [l^{p'}, l^\infty]$ is defined by the transpose of the matrix defining A. We see immediately that $A' \in 3$, for if $x = (\xi_1, 0, 0, 0, \ldots)$, $\xi_1 \neq 0$, then $A'x = 0$. It is easy to see that $A'l^\infty \subset l^1$, from which it follows that $A'l^p \subset l^1$ for each p and therefore $\overline{A'l^p} \neq l^\infty$. Thus if we require that $1 < p < \infty$ we have shown that (A, A') has the state $(\mathrm{III}_2, \mathrm{III}_3)$ with X complete and Y reflexive.

The nine examples of states given so far certainly serve as examples of these states where X and Y are complete. However, it is easy to show that all nine of these states are possible with both X and Y complete but neither of them reflexive. For the states $(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$, $(\mathrm{III}_1, \mathrm{I}_3)$, $(\mathrm{I}_3, \mathrm{III}_1)$, $(\mathrm{II}_3, \mathrm{III}_2)$, $(\mathrm{III}_3, \mathrm{III}_3)$, $(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_2)$ and $(\mathrm{III}_2, \mathrm{III}_3)$, the examples already given work equally well if we let $X = Y = l^1$ in which case neither space is reflexive. The arguments all carry through as before except that in the case of the example for $(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_2)$ it is necessary to show that $Al^1 \neq l^1$. This is evident, however, since the vector $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$ can easily be shown not to belong to $\mathfrak{R}(A)$. For an example of the state $(\mathrm{II}_2, \mathrm{II}_2)$ where X and Y are both complete, but not reflexive, consider the operator $C \in [c_0]$ defined by the infinite matrix (c_{ij}), where

$$c_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{if } |i - j| = 1, \\ 2 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The operator $C' \in [l^1]$ is, of course, defined by the same matrix as C. It is easy to see that $C'x = 0$ implies $x = 0$, whence $C' \notin 3$. It is not difficult to show that

$$\left\| C' \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{n} \right) \right\| = \frac{3}{n},$$

whence it follows immediately that $C' \in 2$. The range of C' is dense in l^1, for consider the sequence $\{z_n\}$ defined as follows:

$$z_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \xi_{n3}, \ldots),$$

where

$$\xi_{nm} = \begin{cases} \dfrac{m}{n+1} & \text{for } 1 \leqq m < n+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

One can then show that

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{n}{n+j} C' z_{n+j} = y_n.$$

Thus it follows that either $C' \in \mathrm{I}_2$ or $C' \in \mathrm{II}_2$. But since the transpose of the matrix defining C' clearly defines an element of $[l^\infty]$, inspection of the state diagram shows that $C' \in \mathrm{I}_2$. Since $C' \in \mathrm{II}_2$, we see by consulting the state diagram again that C must belong to II_2. Since both c_0 and l^1 are complete, but not reflexive, we thus have an example of $(\mathrm{II}_2, \mathrm{II}_2)$ with the required conditions on X and Y.

For an example of the state $(\mathrm{III}_2, \mathrm{II}_3)$ where X and Y are both complete, but neither is reflexive, consider the matrix (a_{ij}), where

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{j-1}} & \text{if } i > 1 \text{ and } i - j \leqq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is easy to see that this matrix defines an operator A belonging to $[c_0]$. It has been shown earlier that the transpose of this matrix defines an element of $[l^1]$ which belongs to II_3. Thus $A' \in \mathrm{II}_3$, and inspection of the state diagram reveals that A is necessarily a member of III_2.

If we relax the hypotheses and merely require that X be complete, we can give examples of 3 new states in addition to the 9 states already listed. These additional states are $(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_2)$, $(\mathrm{I}_2, \mathrm{III}_2)$ and $(\mathrm{I}_3, \mathrm{III}_2)$.

We shall obtain examples of these states by a procedure which modifies examples of states that have already been given. The procedure to be followed will now be outlined.

Suppose $A \in [X, Y]$ and $\overline{\mathfrak{R}(A)} = Z \neq Y$. If we define $B \in [X, Z]$ by $Bx = Ax$ when $x \in X$, then $B \in \mathrm{I}$ while $A \in \mathrm{II}$ or $A \in \mathrm{III}$. Clearly A^{-1} and B^{-1} exist or fail to exist together, and if they both exist, they are either both continuous or both discontinuous. Thus B belongs to 1, 2 or 3 according as A belongs to 1, 2 or 3. If in addition $\overline{\mathfrak{R}(A)} = Y$ and Y is complete, we can identify Z' and Y' and we can also identify B' and A', so they both have the same classification in the 9-fold system. Thus a state $(\mathrm{II}_i, —)$ for (A, A'), $i = 1, 2, 3$, corresponds to a state $(\mathrm{I}_i, —)$ for (B, B') (the same symbol in place of — in both cases).

Using this procedure we easily obtain examples of the states $(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_2)$, $(\mathrm{I}_2, \mathrm{III}_2)$ and $(\mathrm{I}_3, \mathrm{III}_2)$ from the previously given examples of the states $(\mathrm{II}_2, \mathrm{II}_2)$, $(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_2)$ and $(\mathrm{II}_3, \mathrm{III}_2)$, respectively.

If we require only that Y be complete, in addition to the 9 states possible when X and Y are both complete, 4 new states are possible. We now give examples of these states.

$(\mathrm{II}_1, \mathrm{I}_1)$: Let Y be a complete space and let X be a proper but dense subspace of Y. Let A be the identity mapping of X onto X. Then $A \in \mathrm{II}_1$ and $A' \in \mathrm{I}_1$, for A' is the identity mapping of Y' onto $X' = Y'$.

$(\mathrm{II}_3, \mathrm{III}_1)$: Let X be the space l_i^p, the set of terminating sequences under the usual norm for the space l^p, and let $Y = l^p$, $1 \leqq p < \infty$. Let A be the operator defined by the

infinite matrix (a_{ij}), where

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } i = j - 1, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

It is clear that A^{-1} doesn't exist, since $Ay_1 = 0$. We easily see that $\mathfrak{R}(A) = X$, whence $\overline{\mathfrak{R}(A)} = Y$, since it is obvious that X is dense in Y. Thus $A \in \mathrm{II}_3$. Since A is continuous it has an extension $\hat{A} \in [l^p]$, and $\hat{A}' = A'$ is defined by the transpose of the matrix defining A. We know from previous examples that $A' \in \mathrm{III}_1$.

$(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_1)$: Let X be the subspace of c_0 consisting of those elements of c_0 which are terminating sequences, and let $Y = c_0$. The space X is not complete, but it is dense in Y. Consider the operator $A \in [X, Y]$, defined by the infinite matrix (a_{ij}), where

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } i = j, \\ -2 \text{ if } i = j - 1, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

If $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ and $Ax = y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$, then

$$\eta_k = \xi_k - 2\xi_{k+1}; \; k = 1, 2, \ldots,$$

whence $Ax = 0$ implies that

$$\xi_{n+1} = \frac{1}{2^n}\,\xi_1.$$

The null vector is the only element of X for which this can be true, thus A^{-1} exists. Considering the equations

$$\eta_k = \xi_k - 2\xi_{k+1},$$

we see that if $y \in \mathfrak{R}(A)$ and ξ_1 is known, then

$$\xi_k = \frac{1}{2^{k-1}}\,\xi_1 - \frac{1}{2^{k-1}}\,\eta_1 - \frac{1}{2^{k-2}}\,\eta_2 - \cdots - \frac{1}{2}\,\eta_{k-1}.$$

Since $x \in X$ there exists an integer N, such that for $n > N$, $\xi_n = 0$. But this implies that for sufficiently large n,

$$\xi_1 = \eta_1 + 2\,\eta_2 + 2^2\,\eta_3 + \cdots + 2^{n-2}\,\eta_{n-1}.$$

If $\xi_N \neq 0$ and $\xi_n = 0$ when $n > N$, then we know that $\eta_N = \xi_N$ and $\eta_n = 0$ when $n > N$. Hence

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1 + 2\,\eta_2 + 2^2\,\eta_3 + \cdots + 2^{N-1}\,\eta_N \\ \xi_2 &= \qquad\quad \eta_2 + 2\,\eta_3 + \cdots + 2^{N-2}\,\eta_N \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_N &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \eta_N, \end{aligned}$$

and $\xi_n = 0$ if $n > N$.

This defines the inverse mapping A^{-1}, which clearly has X for its domain, whence A is a 1-1 map of X onto all of X. Note that

$$\| A^{-1} y_n \| = 2^{n-1},$$

and therefore A^{-1} is not continuous. Thus, considered as an element of $[X, Y]$, $A \in \mathrm{II}_2$, and considered as an element of $[X, X]$, $A \in \mathrm{I}_2$.

Now $X' = Y' = l^1$ and A' is defined by the infinite matrix (a'_{ij}), where

$$a'_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } i = j, \\ -2 \text{ if } i = j + 1, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Thus if $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in X'$, $A'x = y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ means that

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1, \\ \eta_{k+1} &= -2\xi_k + \xi_{k+1} \end{aligned}$$

for $k \geqq 1$. From these equations we immediately see that $Ax = 0$ implies $x = 0$. We also see, by the use of induction, that

$$\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2 + \cdots + \frac{1}{2^n}\eta_{n+1} = \frac{1}{2^n}\xi_{n+1}.$$

Since $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$, it follows that a necessary condition for $y \in \mathfrak{R}(A')$ is that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}\eta_k = 0.$$

The set of vectors satisfying this condition form a closed proper subspace of l^1. Thus $\overline{\mathfrak{R}(A')} \neq l^1$, and $A' \in \mathrm{III}$. Inspection of the state diagram shows that A' must belong either to III_1 or III_2. We shall see that $A' \in \mathrm{III}_1$. This is made clear by the fact that

$$\| A'x \| = | \xi_1 | + \sum_{k=1}^{\infty} | -2\xi_k + \xi_{k+1} | \geqq 2\sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k | - \sum_{k=1}^{\infty} | \xi_{k+1} | \geqq \| x \|,$$

which implies that $(A')^{-1}$ exists and is bounded.

We can thus conclude that state of (A, A') is $(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_1)$ if we consider A as an element of $[X, Y]$, and that the state of (A, A') is $(\mathrm{I}_2, \mathrm{III}_1)$ if we consider A as an element of $[X, X]$.

Alternative examples of the two states just given are afforded by letting $X = l_t^1$, $Y = l^1$ and A be the operator defined by the infinite matrix (a_{ij}), where

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } i = j - 1, \\ \dfrac{1}{2^i} \text{ if } j = 1, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

In this case (A, A') has the state $(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_1)$ or $(\mathrm{I}_2, \mathrm{III}_1)$ according as A is considered as an element of $[X, Y]$ or $[X, X]$.

We note that in the two examples given for the state $(\mathrm{I}_2, \mathrm{III}_1)$, neither space is complete. We now give an example of this state where Y is complete and X is not.

Let Y be any Banach space of infinite dimension and let H be a Hamel basis of Y, with all elements $h \in H$ such that $\| h \| \leqq 1$. Then necessarily H is an infinite set. To each $y \in Y$ corresponds a unique finite set $h_1 \ldots, h_n \in H$ and unique scalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ such that $y = \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n$. Now let us define

$$N(y) = \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i |.$$

Then N is a norm, and with N as a norm Y becomes a normed linear space, call it X. Define A on X to Y by $Ay = y$ (the identity mapping). Then

$$\| Ay \| = \| y \| \leqq \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i | \, \| h_i \| \leqq \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i | = N(y),$$

and so A is continuous (i. e. $A \in [X, Y]$). Clearly $\mathfrak{R}(A) = Y$. Also A^{-1} exists, but A^{-1} is not continuous. For, continuity of A^{-1} would imply the existence of a constant C such that

$$N(y) \leqq C \| y \|,$$

and then the inequalities

$$\| y \| \leqq N(y) \leqq C \| y \|$$

together with the completeness of Y, would imply the completeness of X. But X is not complete, as we now show.

Select some countable set of h's and call them $g_1, g_2, \ldots$. Let

$$y_n = g_1 + \frac{1}{2^2} g_2 + \frac{1}{3^2} g_3 + \cdots + \frac{1}{n^2} g_n.$$

If $m < n$,

$$N(y_n - y_m) \leqq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \to 0$$

as m, n become infinite. Thus $\{y_n\}$ is a Cauchy sequence in X. But it has no limit in X, for suppose $N(y_n - y) \to 0$, where $y = \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_p h_p$. Perhaps some of the $h_1, \ldots, h_p$ coincide with some of the $g_1, \ldots, g_n, \ldots$, but certainly there exists an N such that g_n is distinct from $h_1 \ldots, h_p$ if $n > N$. Then from the definition of $N(y_n - y)$ we have

$$N(y_n - y) \geqq \frac{1}{(N+1)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \text{ if } n > N.$$

Thus we see that

$$N(y_n - y) \geqq \frac{1}{(N+1)^2} \text{ if } n > N,$$

and $N(y_n - y)$ does not approach 0 as n becomes infinite. Hence X is not complete.

We now know that $A \in \mathrm{I}_2$; since Y is complete and X is not, the second state diagram shows that $A' \in \mathrm{III}_1$.

The examples of the 16 possible states given in this section complete the justification of the entries in the state diagram given in § 5.

7. The spectrum of an operator and its conjugate.

In this section we assume that X is a Banach space and that A is a continuous linear operator mapping X into itself. A scalar λ is said to be in the *resolvent set* of A if the state of $\lambda - A$ is I_1. Otherwise λ is said to be in the *spectrum* of A. The resolvent set is denoted by $\varrho(A)$ and the spectrum by $\sigma(A)$. The customary subdivision of the spectrum is as follows:

Point spectrum: λ such that the state of $\lambda - A$ is I_3, II_3 or III_3.

Continuous spectrum: λ such that the state of $\lambda - A$ is II_2.

Residual spectrum: λ such that the state of $\lambda - A$ is III_1 or III_2.

The point, continuous, and residual spectra of A are denoted by $P\sigma(A)$, $C\sigma(A)$ and $R\sigma(A)$, respectively.

These definitions can be applied to A'. Now $(\lambda - A)' = \lambda - A'$, and so the second state diagram can be used to draw inferences about the point sets $\varrho(A)$, $\sigma(A)$, $P\sigma(A)$, $C\sigma(A)$ and $R\sigma(A)$ in relation to the corresponding sets for A'. We state some of these inferences formally as theorems.

Theorem 12. $\varrho(A) = \varrho(A')$, *or equivalently,* $\sigma(A) = \sigma(A')$.

This results from the observation that the state of A is I_1 if and only if the state of A' is I_1.

Theorem 13. $P\sigma(A) \subset P\sigma(A') \cup R\sigma(A')$.

Proof. If $\lambda \in P\sigma(A)$ the state of $\lambda - A$ is either I_3, II_3 or III_3. The state diagram then shows that the state of $\lambda - A'$ is either III_1, III_2 or III_3. Hence λ is either in $R\sigma(A')$ or $P\sigma(A')$.

In a similar way we can demonstrate the following theorems:

Theorem 14. $P\sigma(A') \subset P\sigma(A) \cup R\sigma(A)$.

Theorem 15. $C\sigma(A) \subset C\sigma(A') \cup R\sigma(A')$.

Theorem 16. $C\sigma(A') \subset C\sigma(A)$.

Theorem 17. $C\sigma(A) = C\sigma(A')$ *if* X *is reflexive.*

Theorem 18. $R\sigma(A) \subset P\sigma(A')$.

Theorem 19. $R\sigma(A') \subset P\sigma(A) \cup C\sigma(A)$.

Theorem 20. $R\sigma(A') \subset P\sigma(A)$ *if* X *is reflexive.*

Actually, these theorems do not furnish information as precise as that furnished by consulting the state diagram, for in these theorems we ignore the finer classifications of $P\sigma(A)$ and $R\sigma(A)$ into the points corresponding to states I_3, II_3, III_3 and III_1, III_2 respectively.

8. Operators in Hilbert space.

If X is a Hilbert space and A is a continuous linear operator mapping X into itself, it is customary to consider the adjoint A^* instead of the conjugate A'. The link between A^* and A' may be provided as follows: There exists an operator E which maps X onto all of X', and has the properties

$$E(y_1 + y_2) = Ey_1 + Ey_2,$$
$$E(\alpha y) = \bar{\alpha} Ey,$$
$$\| Ey \| = \| y \|.$$

This operator is defined by $Ey = y'$, where $y \in X$, $y' \in X'$, and $y'(x) = (x, y)$, (x, y) being the inner product in X. The operator E has an inverse, and

$$A^* = E^{-1} A' E. \tag{8.1}$$

Using this formula it is easy to show that A^* and A' have the same state. Hence, A^* may be put in place of A' in using the state diagram. We can speak of the state of the pair (A, A^*) instead of that of (A, A'). In discussing the spectrum of A and A^*, however, it is necessary to remember that $(\lambda - A)^* = \bar{\lambda} - A^*$.

For normal operators the discussion of states is greatly simplified. We recall that A is said to be *normal* if $AA^* = A^*A$.

Theorem 21. *If* X *is a Hilbert space and* A *is normal, then* $\overline{\mathfrak{R}(A)} = \overline{\mathfrak{R}(A^*)}$, *as a consequence, there are just three possible states for* A, *namely* I_1, II_2, III_3. *Moreover,* A^* *is in the same state as* A.

Proof. If $S \subset X$ we denote by $S^{\perp}$ the set of all elements of X orthogonal to S. It is then an easy matter to prove that

$$\overline{\mathfrak{R}(A)} = \mathfrak{N}(A^*)^{\perp}. \tag{8. 2}$$

This holds for any A, whether normal or not. We can deduce this from (3. 3), using (8. 1), or give a direct proof. The ideas are the same in either case. Next we prove that

$$\mathfrak{N}(A^*) = \mathfrak{N}(AA^*). \tag{8. 3}$$

It is evident that $\mathfrak{N}(A^*) \subset \mathfrak{N}(AA^*)$. On the other hand, $\mathfrak{N}(AA^*) \subset \mathfrak{N}(A^*)$; for if $AA^*x=0$ we have $(A^*x, A^*x) = (AA^*x, x) = 0$, and so $A^*x = 0$. From (8. 2) and (8. 3) we infer that

$$\overline{\mathfrak{R}(A)} = \overline{\mathfrak{R}(AA^*)}. \tag{8. 4}$$

Now we use the assumption that A is normal. Applying (8. 4) to A^* and recalling that $A^{**} = A$, we have

$$\overline{\mathfrak{R}(A^*)} = \overline{\mathfrak{R}(A^*A)} = \overline{\mathfrak{R}(AA^*)} = \overline{\mathfrak{R}(A)}.$$

It now follows that if one the operators A, A^* is in a III-state, so is the other. But, of the seven possible states for (A, A^*), as shown on the state diagram, the only ones which meet this requirement concerning III-states are $(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$, $(\mathrm{II}_2, \mathrm{II}_2)$, and $(\mathrm{III}_3, \mathrm{III}_3)$. This proves the theorem.

Since $\lambda - A$ is normal if A is normal, Theorem 21 implies that the residual spectrum of a normal operator is empty, and that λ is in the point spectrum of A if and only if the range of $\lambda - A$ is not everywhere dense in X.

References.

[1] *S. Banach*, Opérations Linéaires, Warsaw 1932.
[2] *N. Bourbaki*, Espaces Vectoriels Topologiques, Chapters I, II, Paris 1953.
[3] *Charles J. A. Halberg, Jr.*, Spectral Theory of Linked Operators in the Spaces l_p, Thesis, 1955. University of California, Los Angeles.
[4] *E. Hille*, Functional Analysis and Semi-groups, New York 1948.
[5] *A. C. Zaanen*, Linear Analysis, Amsterdam-Groningen 1953.

The University of California, Los Angeles
and
The University of California, Riverside

Eingegangen 10. Juli 1956.

Lösung eines Problems von Ch. Hopkins.

Von *Hans-Jürgen Hoehnke* in Halle (S.).

In einer Arbeit von Ch. Hopkins[1] [2]) über Ringe mit Minimalbedingung für Linksideale[3]) wird behauptet, daß der durch ein ausgezeichnetes Idempotent e zerstörte Teil[4]) eines MLI Rings $\mathfrak{o}$ für $\varrho \leqq 3$ von der speziellen Wahl von e nicht abhängt, wo ϱ der Nilpotenzexponent des Radikals von $\mathfrak{o}$ ist; und es wird als eine offene Frage angesehen, ob das auch noch für $\varrho > 3$ zutrifft. Wir werden diese Frage in der vorliegenden Arbeit verneinend beantworten und im Abschnitt 1 mit einem Gegenbeispiel zeigen, daß das fragliche Hopkinssche Theorem selbst für $\varrho = 3$ schon falsch ist. In den Abschnitten 2 und 3 betrachten wir die allgemeine Gestalt der ausgezeichneten Idempotente und der durch sie zerstörten Teile eines MLI Rings im Licht einer Arbeit von J. Dieudonné[5]), die als Fortführung der Hopkinsschen Untersuchungen anzusehen ist. Wir knüpfen unmittelbar an die genannte Arbeit von Dieudonné an, verwenden dessen Terminologie und vermeiden Wiederholungen. Die letzten drei Abschnitte enthalten Bemerkungen zum Konstruktionsproblem hyperkomplexer Systeme und Spezialisierungen.

1. Ein Idempotent e eines Rings $\mathfrak{o}$ heißt ausgezeichnet oder Hauptidempotent, wenn kein Idempotent $u \in \mathfrak{o}$ mit $eu = ue = 0$ existiert. Betrachtet man die Zerlegungen $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}e + \mathfrak{l}$ und $\mathfrak{o} = e\mathfrak{o} + \mathfrak{r}$ bezüglich eines Idempotents e, wobei $\mathfrak{l}$ ($\mathfrak{r}$) der Links (Rechts)-annihilator von e in $\mathfrak{o}$ ist, so lassen sich die Hauptidempotente eines MLI Rings wie folgt charakterisieren:

Lemma. *Wenn der durch ein Idempotent e zerstörte Teil $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ ein Nilring ist, so ist e ausgezeichnet. Wenn e ausgezeichnet ist, so sind $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}$ im Radikal $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{o}$ enthalten, falls $\mathfrak{o}$ ein MLI Ring ist*[6]).

Hopkins hat behauptet[7]), daß der von einem Hauptidempotent e zerstörte Teil von der speziellen Wahl eines solchen e unabhängig ist, falls der Exponent[8]) ϱ von $\mathfrak{T}$ den Wert 3 nicht übersteigt. Weiter heißt es dort: „Ob die Behauptung für $\varrho > 3$ gilt, ist noch eine offene Frage“[9]). Indessen ist das Hopkinssche Theorem[10]) schon falsch

[1]) Literaturverzeichnis am Schluß unserer Arbeit.

[2]) Lit. [5], Theorem 4. 3, p. 722.

[3]) Einen Ring mit Minimalbedingung für Rechts (Links)-Ideale bezeichnen wir wie Hopkins als MRI (MLI)-Ring und einen Ring, der zugleich MRI und MLI Ring ist, als MRLI Ring.

[4]) Das ist der Durchschnitt des Rechts- und Linksannihilators von e in $\mathfrak{o}$; vgl. [2], S. 99.

[5]) Lit. [3], zitiert als D.

[6]) Lit. [5], Theorem 4. 2, p. 721.

[7]) Lit. [5].

[8]) Das ist die kleinste natürliche Zahl ϱ mit $\mathfrak{T}^\varrho = 0$.

[9]) Lit. [5], p. 722.

[10]) Lit. [5], Theorem 4. 3, p. 722. Desgleichen ist auch das Theorem 7. 2, p. 729 nur für $\varrho \leqq 2$ richtig.

für $\varrho = 3$, wie folgendes Beispiel eines (assoziativen) hyperkomplexen Systems $\mathfrak{o}$ mit der Basis c_{ij}, d_{kl} $(i, j, k, l = 1, 2)$, e_1, e_2 über einem Körper P, und mit der Produkttafel zeigt.

	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	d_{11}	d_{12}	d_{21}	d_{22}	e_1	e_2
c_{11}	c_{11}	c_{12}	0	0	d_{11}	d_{12}	0	0	0	0
c_{12}	0	0	c_{11}	c_{12}	0	0	d_{11}	d_{12}	0	0
c_{21}	c_{21}	c_{22}	0	0	d_{21}	d_{22}	0	0	0	0
c_{22}	0	0	c_{21}	c_{22}	0	0	d_{21}	d_{22}	0	0
d_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	d_{11}
d_{21}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_{22}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	d_{21}
e_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	e_1

Das Radikal $\mathfrak{T} = \sum_{i,k} P d_{ik} + \mathfrak{o}_1$ $(\mathfrak{o}_1 = Pe_1 + Pe_2)$ ist vom Exponenten 3. Alle Elemente der Form $e = c_{11} + c_{22} + \Sigma\, a_{ik} d_{ik}$ $(a_{ik} \in P)$ sind Hauptidempotente, denn e ist ein Idempotent, und für ein Element des durch e zerstörten Teils $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ erhält man

$$x - ex - xe + exe = -a_{12} w_2 d_{11} - a_{22} w_2 d_{21} + \xi \in \mathfrak{T},$$

wenn x ein beliebiges Element von $\mathfrak{o}$ darstellt, mit der $\mathfrak{o}_1$-Komponente $\xi = w_1 e_1 + w_2 e_2$ $(w_1, w_2 \in P)$. Gleichzeitig erkennt man, wie $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ von e abhängt: Dann und nur dann ist $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{o}_1$, wenn e die Form $e = c_{11} + c_{22} + a_{11} d_{11} + a_{21} d_{21}$ besitzt.

2. Wir gehen jetzt zum allgemeinen Fall über und untersuchen die Gestalt des durch ein Hauptidempotent zerstörten Teils eines MRLI Rings $\mathfrak{o}$. Dazu denken wir uns $\mathfrak{o}$ nach Dieudonné (D. § 3) in die direkte Summe zweier zweiseitiger Ideale $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{o}$ zerlegt, $\mathfrak{o} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, wobei $\mathfrak{B}$ halbeinfach ist (D. n° 11). Wenn e ein Hauptidempotent von $\mathfrak{o}$ ist und $\mathfrak{C}$ überhaupt ein Idempotent enthält, so ist die $\mathfrak{C}$ $(\mathfrak{B})$-Komponente von e ein Hauptidempotent von $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{B}$, und damit gleich der Eins von $\mathfrak{B}$) und umgekehrt. Der durch die $\mathfrak{B}$-Eins zerstörte Teil von $\mathfrak{B}$ ist Null; wir dürfen uns daher auf den Fall $\mathfrak{B} = 0$ beschränken und eine *zweiseitige Dieudonnésche Zerlegung ersten Grades* von $\mathfrak{o}$ verwenden (D. n° 18),

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{S}_1, \tag{1}$$

wo

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{L} + \mathfrak{R} \quad \left(\mathfrak{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{L}_i,\ \mathfrak{R} = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{R}_j\right) \tag{2}$$

ein halbeinfacher Teilring, der *Hauptteil ersten Grades* und

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{d} + \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1 \quad \left(\mathfrak{d} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{d}_{ij},\ \mathfrak{a}' = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}'_i,\ \mathfrak{b}' = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}'_j\right) \tag{3}$$

ein zweiseitiges Ideal, der *Restteil ersten Grades* von $\mathfrak{o}$ ist. Diese direkte Zerlegung von $\mathfrak{o}$ besteht ihrer Herleitung nach nur, wenn sowohl der Rechtssockel[11]) wie der Linkssockel von $\mathfrak{o}$ regulär[12]) ist. Wenn der Linkssockel von $\mathfrak{o}$ regulär ($\mathfrak{L} \neq 0$), der Rechtssockel aber nilpotent ($\mathfrak{R} = 0$) ist, so wollen wir unter (1) bis (3) eine linksseitige Zerlegung ersten

[11]) Der Rechtssockel eines Rings $\mathfrak{o}$ mit minimalen Rechtsidealen ist die Summe aller minimalen Rechtsideale, vgl. Lit. [4]. Analog wird der Linkssockel definiert.

[12]) Nach G. Köthe [6] heißt ein Ideal regulär, wenn es nicht aus lauter nilpotenten Elementen besteht.

Grades von $\mathfrak{o}$ verstehen (D. § 2), wobei $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{S}_1$ der Linksannihilator der Eins e' von $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{o}$ ist. $\mathfrak{S}_1$ ist ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$; denn für $x \in \mathfrak{S}_1$ und $u \in \mathfrak{o}$ hat man $(xu)e' = x(ue')$ und $ue' \in \mathfrak{L}$, da $\mathfrak{L}$ ein Linksideal von $\mathfrak{o}$ ist, folglich $e'ue' = ue'$ und $x(ue') = x(e'ue') = (xe')(ue') = 0$, woraus sich $xu \in \mathfrak{S}_1$ ergibt. Da $\mathfrak{a}e' = 0$ ist, ist $\mathfrak{a} < \mathfrak{S}_1$[13]) (D. n° 7). $\mathfrak{o}_1$ sei der Rechtsannihilator von e' in $\mathfrak{S}_1$. Dann ist $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{o}_1$. Denn es ist $\mathfrak{a} = e'\mathfrak{a} < e'\mathfrak{S}_1$, andererseits ist $e'\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{G}\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{G}$ und $e'\mathfrak{S}_1 e' = 0$, d. h. $e'\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{a}$, da $\mathfrak{a}$ der Linksannihilator von e' in $\mathfrak{G}$ ist. In diesem Fall haben wir also einfach $\mathfrak{b} = 0$, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = 0$ zu setzen. Eine analoge Bezeichnungsweise sei vereinbart, wenn $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{R} \neq 0$ ist. Den Fall $\mathfrak{L} = \mathfrak{R} = 0$ (wo die Dieudonnéschen Hilfsmittel der Zerlegungen höheren Grades nur Aussagen für gewisse Restklassenringe liefern) lassen wir außer Betracht. Dann können wir die Dieudonnésche Produkttafel (D. n° 18) durchweg benutzen, die sich für eine linksseitige Zerlegung ersten Grades von $\mathfrak{o}$ nach folgendem Schema reduziert:

	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{o}_1$
$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{a}$	0
$\mathfrak{a}$	0	0	$< \mathfrak{a}$
$\mathfrak{o}_1$	0	0	$< \mathfrak{o}_1$

Zum allgemeinen Fall übergehend sei

$$x = \sum_{i=1}^{6} x_i \qquad (x_1 \in \mathfrak{L},\ x_2 \in \mathfrak{R},\ x_3 \in \mathfrak{b},\ x_4 \in \mathfrak{a}',\ x_5 \in \mathfrak{b}',\ x_6 \in \mathfrak{o}_1) \tag{4}$$

irgendein Element von $\mathfrak{o}$ und $y = \sum_{j=1}^{6} y_j$ ein zweites Element. Setzt man $xy = z = \sum_{k=1}^{6} z_k$, so ist nach der Dieudonnéschen Produkttafel

$$\begin{gathered} z_1 = x_1 y_1,\ z_2 = x_2 y_2,\ z_3 = x_3 y_2 + x_1 y_3 + x_4 y_5,\ z_4 = x_1 y_4 + x_4 y_6, \\ z_5 = x_5 y_2 + x_6 y_5,\ z_6 = x_6 y_6. \end{gathered} \tag{5}$$

3. Bezeichnet man die Einzelemente von $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{R}$ mit e' bzw. e'', so ist

$$\varepsilon = \begin{cases} e' + e'' & (\mathfrak{L} \neq 0,\ \mathfrak{R} \neq 0) \\ e' & (\mathfrak{L} \neq 0,\ \mathfrak{R} = 0) \\ e'' & (\mathfrak{L} = 0,\ \mathfrak{R} \neq 0) \end{cases} \tag{6}$$

die Eins von $\mathfrak{P}_1$. Ferner ist e' Linkseins von $\mathfrak{L} + \mathfrak{b} + \mathfrak{a}'$ und e'' Rechtseins von $\mathfrak{R} + \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$. Daher ist $\mathfrak{a}' + \mathfrak{o}_1$ $(\mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1)$ der Links (Rechts)-annihilator von ε in $\mathfrak{o}$, und in jedem Fall ist $\mathfrak{o}_1$ der durch ε zerstörte Teil von $\mathfrak{o}$. Nach einem bekannten Theorem[14]) ist *mit* $\mathfrak{o}$ *zugleich auch* $\mathfrak{o}_1$ *ein MRLI Ring*[15]). Folglich[16]) ist $\mathfrak{o}_1$ entweder nilpotent, und ε ist selbst ausgezeichnet oder $\mathfrak{o}_1$ enthält ein Hauptidempotent ε_1 von $\mathfrak{o}_1$, und dann ist $e = \varepsilon + \varepsilon_1$ ein Hauptidempotent von $\mathfrak{o}$; denn aus $xe = 0$ für irgendein $x \in \mathfrak{o}$ folgt mit $\varepsilon\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon = 0$, daß $x\varepsilon = x\varepsilon_1 = 0$, und aus $ex = 0$, daß auch $\varepsilon x = \varepsilon_1 x = 0$ ist. Somit gehört x zu $\mathfrak{o}_1$, da $\mathfrak{o}_1$ der durch ε zerstörte Teil von $\mathfrak{o}$ ist; und weil x in dem durch ε_1 zerstörten Teil von $\mathfrak{o}_1$ liegt, kann x kein Idempotent sein. Demnach ist e in $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet.

---

[13]) Das Enthalten-Zeichen $<$ schließt Gleichheit nicht aus.

[14]) Vgl. [5], 4. (a), p. 721.

[15]) Dies erwähnt Dieudonné [3] nicht.

[16]) Nach [5], Theorem 4. 1, p. 721.

Für ein beliebiges Hauptidempotent e machen wir den Ansatz

$$(7) \qquad e = e^{(0)} + e^{(1)} + e^{(\mathfrak{T})} \qquad (e^{(0)} \in \mathfrak{P}_1,\ e^{(1)} \in \mathfrak{o}_1,\ e^{(\mathfrak{T})} \in \mathfrak{d} + \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' < \mathfrak{T}).$$

Die Idempotenz von e ergibt nach (5) die Bedingungen

$$(e^{(i)})^2 = e^{(i)} \qquad (i = 0, 1).$$

Bekanntlich unterscheiden sich zwei Hauptidempotente aus $\mathfrak{o}$ nur um ein additives Element des Radikals $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{o}$[17]). Wir haben also

$$e^{(0)} + e^{(1)} + e^{(\mathfrak{T})} = \varepsilon + \varepsilon_1 + t \qquad (t \in \mathfrak{T}),$$

worin $\varepsilon_1 = 0$ zu setzen ist, wenn $\mathfrak{o}_1$ nilpotent ist. Da $\mathfrak{P}_1\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{o}_1\mathfrak{P}_1 = 0$ ist, folgt aus

$$(\varepsilon - e^{(0)}) + (\varepsilon_1 - e^{(1)}) = e^{(\mathfrak{T})} - t,$$

daß für $i = 1, 2, \ldots$

$$(\varepsilon - e^{(0)})^i + (\varepsilon_1 - e^{(1)})^i = (e^{(\mathfrak{T})} - t)^i$$

gilt, und daraus wegen $e^{(\mathfrak{T})} - t \in \mathfrak{T}$ und $(\varepsilon - e^{(0)})^i = \varepsilon - e^{(0)}$, daß $e^{(0)} = \varepsilon$ sein muß. Zerlegt man nun e gemäß $e = \sum_{i=1}^{6} e_i$, so bleiben für die Idempotenz von e nach (5) noch die Bedingungen

$$\begin{aligned} e_3e_2 + e_1e_3 + e_4e_5 &= e_3, \\ e_1e_4 + e_4e_6 &= e_4, \\ e_5e_2 + e_6e_5 &= e_5 \end{aligned}$$

mit $e_1 + e_2 = \varepsilon$. Gemäß (6) wird demnach mit den Abkürzungen $r = e_4$, $s = e_5$

$$(8) \qquad e = \varepsilon - rs + r + s + e^{(1)},\ re^{(1)} = e^{(1)}s = 0,$$

und ein Element des durch e zerstörten Teils von $\mathfrak{o}$ läßt sich in der Form

$$\begin{aligned} (9) \qquad x - ex - xe + exe &= rx_6s - r(x_6 - x_6e^{(1)}) - (x_6 - e^{(1)}x_6)\,s + \xi \\ &= r\xi s - r\xi - \xi s + \xi \end{aligned}$$

mit $\xi = x_6 - e^{(1)}x_6 - x_6e^{(1)} + e^{(1)}x_6e^{(1)}$ darstellen, wo $x = \sum_{i=1}^{6} x_i$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{o}$ ist und die vier Bestandteile der ersten Darstellung rechts beziehentlich den Ringen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{o}_1$ angehören. Hieraus ersieht man in Verbindung mit Lemma 1 und $r\xi s - r\xi - \xi s \in \mathfrak{T}$, daß ξ im Radikal $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{o}$ liegt, wenn e ausgezeichnet ist. Daher ist $e^{(1)}$ ein Hauptidempotent von $\mathfrak{o}_1$, wenn $e^{(1)} \neq 0$ ist. Wenn $e^{(1)} = 0$, so ist $\xi = x_6$, also $\mathfrak{o}_1 < \mathfrak{T}$, $\mathfrak{o}_1$ nilpotent. Umgekehrt erkennt man leicht, daß ein Element $e \in \mathfrak{o}$ der Form (8) ein Hauptidempotent von $\mathfrak{o}$ ist, wenn r bzw. s irgendein Element aus $\mathfrak{a}'$ bzw. $\mathfrak{b}'$ und $e^{(1)} = 0$ ist, falls $\mathfrak{o}_1$ nilpotent ist, oder $e^{(1)}$ ein Hauptidempotent von $\mathfrak{o}_1$ mit $re^{(1)} = e^{(1)}s = 0$, falls $\mathfrak{o}_1$ nicht nilpotent ist. Denn bekanntlich[18]) ist $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{o}_1$ das Radikal von $\mathfrak{o}_1$, da $\mathfrak{o}_1$ der durch ε zerstörte Teil von $\mathfrak{o}$ ist.

Falls $\mathfrak{o}_1$ ebenfalls die Forderungen erfüllt, die wir bisher an $\mathfrak{o}$ gestellt haben, so kann man für $e^{(1)}$ eine analoge Aufspaltung wie für e angeben, wobei evtl. noch die Eins eines halbeinfachen zweiseitigen Ideals $\mathfrak{B}^{(\mathfrak{o}_1)}$ von $\mathfrak{o}_1$ (D. n° 11) hinzutritt, usw. Wir fassen unsere Resultate wie folgt zusammen:

Satz. *Wenn $\mathfrak{o}$ ein nicht-nilpotenter MRLI Ring mit $\mathfrak{B} = 0$ (siehe oben) und regulärem Rechts- oder Linkssockel ist, so erhält man genau alle Hauptidempotente von $\mathfrak{o}$ in der Form $e = \varepsilon - rs + r + s + e^{(1)}$, wo ε die Eins eines halbeinfachen Systems $\mathfrak{P}_1$ ist und $e^{(1)} = 0$,*

[17]) Vgl. [5], p. 722.
[18]) Vgl. [1], Satz 3, S. 13.

Grades von $\mathfrak{o}$ verstehen (D. § 2), wobei $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{S}_1$ der Linksannihilator der Eins e' von $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{o}$ ist. $\mathfrak{S}_1$ ist ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$; denn für $x \in \mathfrak{S}_1$ und $u \in \mathfrak{o}$ hat man $(xu)e' = x(ue')$ und $ue' \in \mathfrak{L}$, da $\mathfrak{L}$ ein Linksideal von $\mathfrak{o}$ ist, folglich $e'ue' = ue'$ und $x(ue') = x(e'ue') = (xe')(ue') = 0$, woraus sich $xu \in \mathfrak{S}_1$ ergibt. Da $\mathfrak{a}e' = 0$ ist, ist $\mathfrak{a} < \mathfrak{S}_1$[13]) (D. n^0 7). $\mathfrak{o}_1$ sei der Rechtsannihilator von e' in $\mathfrak{S}_1$. Dann ist $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{o}_1$. Denn es ist $\mathfrak{a} = e'\mathfrak{a} < e'\mathfrak{S}_1$, andererseits ist $e'\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{G}\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{G}$ und $e'\mathfrak{S}_1 e' = 0$, d. h. $e'\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{a}$, da $\mathfrak{a}$ der Linksannihilator von e' in $\mathfrak{G}$ ist. In diesem Fall haben wir also einfach $\mathfrak{d} = 0$, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = 0$ zu setzen. Eine analoge Bezeichnungsweise sei vereinbart, wenn $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{R} \neq 0$ ist. Den Fall $\mathfrak{L} = \mathfrak{R} = 0$ (wo die Dieudonnéschen Hilfsmittel der Zerlegungen höheren Grades nur Aussagen für gewisse Restklassenringe liefern) lassen wir außer Betracht. Dann können wir die Dieudonnésche Produkttafel (D. n^0 18) durchweg benutzen, die sich für eine linksseitige Zerlegung ersten Grades von $\mathfrak{o}$ nach folgendem Schema reduziert:

	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{o}_1$
$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{a}$	0
$\mathfrak{a}$	0	0	$< \mathfrak{a}$
$\mathfrak{o}_1$	0	0	$< \mathfrak{o}_1$

Zum allgemeinen Fall übergehend sei

$$x = \sum_{i=1}^{6} x_i \qquad (x_1 \in \mathfrak{L},\ x_2 \in \mathfrak{R},\ x_3 \in \mathfrak{d},\ x_4 \in \mathfrak{a}',\ x_5 \in \mathfrak{b}',\ x_6 \in \mathfrak{o}_1) \tag{4}$$

irgendein Element von $\mathfrak{o}$ und $y = \sum_{j=1}^{6} y_j$ ein zweites Element. Setzt man $xy = z = \sum_{k=1}^{6} z_k$, so ist nach der Dieudonnéschen Produkttafel

$$\begin{gathered} z_1 = x_1 y_1,\ z_2 = x_2 y_2,\ z_3 = x_3 y_2 + x_1 y_3 + x_4 y_5,\ z_4 = x_1 y_4 + x_4 y_6, \\ z_5 = x_5 y_2 + x_6 y_5,\ z_6 = x_6 y_6. \end{gathered} \tag{5}$$

3. Bezeichnet man die Einzelemente von $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{R}$ mit e' bzw. e'', so ist

$$\varepsilon = \begin{cases} e' + e'' & (\mathfrak{L} \neq 0,\ \mathfrak{R} \neq 0) \\ e' & (\mathfrak{L} \neq 0,\ \mathfrak{R} = 0) \\ e'' & (\mathfrak{L} = 0,\ \mathfrak{R} \neq 0) \end{cases} \tag{6}$$

die Eins von $\mathfrak{P}_1$. Ferner ist e' Linkseins von $\mathfrak{L} + \mathfrak{d} + \mathfrak{a}'$ und e'' Rechtseins von $\mathfrak{R} + \mathfrak{d} + \mathfrak{b}'$. Daher ist $\mathfrak{a}' + \mathfrak{o}_1$ $(\mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1)$ der Links (Rechts)-annihilator von ε in $\mathfrak{o}$, und in jedem Fall ist $\mathfrak{o}_1$ der durch ε zerstörte Teil von $\mathfrak{o}$. Nach einem bekannten Theorem[14]) ist *mit* $\mathfrak{o}$ *zugleich auch* $\mathfrak{o}_1$ *ein MRLI Ring*[15]). Folglich[16]) ist $\mathfrak{o}_1$ entweder nilpotent, und ε ist selbst ausgezeichnet oder $\mathfrak{o}_1$ enthält ein Hauptidempotent ε_1 von $\mathfrak{o}_1$, und dann ist $e = \varepsilon + \varepsilon_1$ ein Hauptidempotent von $\mathfrak{o}$; denn aus $xe = 0$ für irgendein $x \in \mathfrak{o}$ folgt mit $\varepsilon\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon = 0$, daß $x\varepsilon = x\varepsilon_1 = 0$, und aus $ex = 0$, daß auch $\varepsilon x = \varepsilon_1 x = 0$ ist. Somit gehört x zu $\mathfrak{o}_1$, da $\mathfrak{o}_1$ der durch ε zerstörte Teil von $\mathfrak{o}$ ist; und weil x in dem durch ε_1 zerstörten Teil von $\mathfrak{o}_1$ liegt, kann x kein Idempotent sein. Demnach ist e in $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet.

---

[13]) Das Enthalten-Zeichen $<$ schließt Gleichheit nicht aus.

[14]) Vgl. [5], 4. (a), p. 721.

[15]) Dies erwähnt Dieudonné [3] nicht.

[16]) Nach [5], Theorem 4. 1, p. 721.

Für ein beliebiges Hauptidempotent e machen wir den Ansatz

$$(7) \qquad e = e^{(0)} + e^{(1)} + e^{(\mathfrak{T})} \qquad (e^{(0)} \in \mathfrak{P}_1,\ e^{(1)} \in \mathfrak{o}_1,\ e^{(\mathfrak{T})} \in \mathfrak{d} + \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' < \mathfrak{T}).$$

Die Idempotenz von e ergibt nach (5) die Bedingungen

$$(e^{(i)})^2 = e^{(i)} \qquad (i = 0, 1).$$

Bekanntlich unterscheiden sich zwei Hauptidempotente aus $\mathfrak{o}$ nur um ein additives Element des Radikals $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{o}$[17]). Wir haben also

$$e^{(0)} + e^{(1)} + e^{(\mathfrak{T})} = \varepsilon + \varepsilon_1 + t \qquad (t \in \mathfrak{T}),$$

worin $\varepsilon_1 = 0$ zu setzen ist, wenn $\mathfrak{o}_1$ nilpotent ist. Da $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{o}_1 = \mathfrak{o}_1 \mathfrak{P}_1 = 0$ ist, folgt aus

$$(\varepsilon - e^{(0)}) + (\varepsilon_1 - e^{(1)}) = e^{(\mathfrak{T})} - t,$$

daß für $i = 1, 2, \ldots$

$$(\varepsilon - e^{(0)})^i + (\varepsilon_1 - e^{(1)})^i = (e^{(\mathfrak{T})} - t)^i$$

gilt, und daraus wegen $e^{(\mathfrak{T})} - t \in \mathfrak{T}$ und $(\varepsilon - e^{(0)})^i = \varepsilon - e^{(0)}$, daß $e^{(0)} = \varepsilon$ sein muß. Zerlegt man nun e gemäß $e = \sum_{i=1}^{6} e_i$, so bleiben für die Idempotenz von e nach (5) noch die Bedingungen

$$\begin{aligned} e_3 e_2 + e_1 e_3 + e_4 e_5 &= e_3, \\ e_1 e_4 + e_4 e_6 &= e_4, \\ e_5 e_2 + e_6 e_5 &= e_5 \end{aligned}$$

mit $e_1 + e_2 = \varepsilon$. Gemäß (6) wird demnach mit den Abkürzungen $r = e_4$, $s = e_5$

$$(8) \qquad e = \varepsilon - rs + r + s + e^{(1)},\ re^{(1)} = e^{(1)} s = 0,$$

und ein Element des durch e zerstörten Teils von $\mathfrak{o}$ läßt sich in der Form

$$\begin{aligned} (9) \qquad x - ex - xe + exe &= r x_6 s - r(x_6 - x_6 e^{(1)}) - (x_6 - e^{(1)} x_6) s + \xi \\ &= r\xi s - r\xi - \xi s + \xi \end{aligned}$$

mit $\xi = x_6 - e^{(1)} x_6 - x_6 e^{(1)} + e^{(1)} x_6 e^{(1)}$ darstellen, wo $x = \sum_{i=1}^{6} x_i$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{o}$ ist und die vier Bestandteile der ersten Darstellung rechts beziehentlich den Ringen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{o}_1$ angehören. Hieraus ersieht man in Verbindung mit Lemma 1 und $r\xi s - r\xi - \xi s \in \mathfrak{T}$, daß ξ im Radikal $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{o}$ liegt, wenn e ausgezeichnet ist. Daher ist $e^{(1)}$ ein Hauptidempotent von $\mathfrak{o}_1$, wenn $e^{(1)} \neq 0$ ist. Wenn $e^{(1)} = 0$, so ist $\xi = x_6$, also $\mathfrak{o}_1 < \mathfrak{T}$, $\mathfrak{o}_1$ nilpotent. Umgekehrt erkennt man leicht, daß ein Element $e \in \mathfrak{o}$ der Form (8) ein Hauptidempotent von $\mathfrak{o}$ ist, wenn r bzw. s irgendein Element aus $\mathfrak{a}'$ bzw. $\mathfrak{b}'$ und $e^{(1)} = 0$ ist, falls $\mathfrak{o}_1$ nilpotent ist, oder $e^{(1)}$ ein Hauptidempotent von $\mathfrak{o}_1$ mit $re^{(1)} = e^{(1)} s = 0$, falls $\mathfrak{o}_1$ nicht nilpotent ist. Denn bekanntlich[18]) ist $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{o}_1$ das Radikal von $\mathfrak{o}_1$, da $\mathfrak{o}_1$ der durch ε zerstörte Teil von $\mathfrak{o}$ ist.

Falls $\mathfrak{o}_1$ ebenfalls die Forderungen erfüllt, die wir bisher an $\mathfrak{o}$ gestellt haben, so kann man für $e^{(1)}$ eine analoge Aufspaltung wie für e angeben, wobei evtl. noch die Eins eines halbeinfachen zweiseitigen Ideals $\mathfrak{B}^{(\mathfrak{o}_1)}$ von $\mathfrak{o}_1$ (D. n^0 11) hinzutritt, usw. Wir fassen unsere Resultate wie folgt zusammen:

Satz. *Wenn $\mathfrak{o}$ ein nicht-nilpotenter MRLI Ring mit $\mathfrak{B} = 0$ (siehe oben) und regulärem Rechts- oder Linkssockel ist, so erhält man genau alle Hauptidempotente von $\mathfrak{o}$ in der Form $e = \varepsilon - rs + r + s + e^{(1)}$, wo ε die Eins eines halbeinfachen Systems $\mathfrak{P}_1$ ist und $e^{(1)} = 0$,*

---

[17]) Vgl. [5], p. 722.

[18]) Vgl. [1], Satz 3, S. 13.

wenn $\mathfrak{o}_1$ *nilpotent, bzw.* $e^{(1)}$ *ein Hauptidempotent von* $\mathfrak{o}_1$ *ist, wenn* $\mathfrak{o}_1$ *nicht nilpotent ist.* r (s) *ist irgendein Element des Links (Rechts)-annihilators von* $e^{(1)}$ *in* $\mathfrak{a}'$ $(\mathfrak{b}')$. *Jedes Element des durch* e *zerstörten Teils von* $\mathfrak{o}$ *hat die Form* (9), *wo* ξ *dem durch* $e^{(1)}$ *zerstörten Teil von* $\mathfrak{o}_1$ *angehört.*

4. Um unser Ergebnis sinnvoll spezialisieren zu können, stellen wir zunächst Bedingungen auf, welche die Bestandteile der Zerlegung (1) bis (3) eines Rings $\mathfrak{o}$ erfüllen müssen, damit die *Multiplikation gemäß* (5) *in* $\mathfrak{o}$ *assoziativ* ist. Dieudonné macht darüber nur ungenaue Angaben (D. n°s 19, 20 und 29). Wenn wir von den Assoziativforderungen bezüglich der Ringe $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} + \mathfrak{b} + \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{R} + \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{o}_1$ absehen, so bleiben genau die Bedingungen

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{a}')\,\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{L}(\mathfrak{a}'\mathfrak{o}_1),\ (\mathfrak{o}_1\mathfrak{b}')\,\mathfrak{R} = \mathfrak{o}_1(\mathfrak{b}'\mathfrak{R}), \tag{10}$$

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{b})\,\mathfrak{R} = \mathfrak{L}(\mathfrak{b}\mathfrak{R}), \tag{11}$$

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{a}')\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{L}(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'),\ (\mathfrak{a}'\mathfrak{b}')\,\mathfrak{R} = \mathfrak{a}'(\mathfrak{b}'\mathfrak{R}), \tag{12}$$

$$(\mathfrak{a}'\mathfrak{o}_1)\,\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{a}'(\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_1),\ (\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_1)\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{o}_1(\mathfrak{o}_1\mathfrak{b}'),\ (\mathfrak{a}'\mathfrak{o}_1)\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}'(\mathfrak{o}_1\mathfrak{b}'), \tag{13}$$

wo $(\mathfrak{L}\mathfrak{a}')\,\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{L}(\mathfrak{a}'\mathfrak{o}_1)$ bedeutet, daß $(ua)\,x = u(ax)$ für alle $a \in \mathfrak{a}'$, $u \in \mathfrak{L}$, $x \in \mathfrak{o}_1$ sein soll usw. Die Gleichungen (10) werden zur Definition der Verknüpfung von $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{o}_1$ bzw. $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{b}'$ benutzt. Aber es trifft nicht zu, daß jedes $\mathfrak{a}_i'$ in der Form $\mathfrak{L}_i a$ mit einem $a \in \mathfrak{a}_i'$ geschrieben werden kann (D. n° 20). Als Gegenbeispiel zu der Behauptung von Dieudonné kann man die direkte Ringsumme $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}' \oplus \mathfrak{o}''$ nehmen, wo

$$\mathfrak{o}' \text{ aus allen Matrizen der Form } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathfrak{o}'' \text{ aus allen Matrizen der Form } \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{bmatrix}$$

mit $x_i, y_k \in K$ besteht. Es ist

$$\mathfrak{a} = Ka_1 + Ka_2 \left(a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$\mathfrak{L} = Ke' \left(e' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right),\ \mathfrak{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix} \text{ und } \mathfrak{R} = Ke'' \left(e'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Da $\mathfrak{a}e'' = 0$ ist, ist $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$ (hierzu vgl. D. n° 15); doch gibt es kein $a \in \mathfrak{a}$, so daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{L}a$ wird.

Übrigens läßt sich jeder (wie $\mathfrak{G}_i$) *links quasieinfache Ring, der direkte Summe von* q *idempotenten und* $p - q$ *nilpotenten isomorphen einfachen Linksidealen ist, als die Gesamtheit aller* p*-reihigen quadratischen Matrizen über einem Schiefkörper* K, *mit lauter Nullen in den* $p - q$ *ersten Zeilen auffassen* (D. n° 5). Ein solcher Ring ist ein Spezialfall des von R. M. Thrall[19]) als Teilmatrizen-Ring bezeichneten Ringtyps. Denken wir uns $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{L}_i + \mathfrak{a}_i$ auf diese Weise als Teilmatrizen-Ring durch p-reihige Matrizen dargestellt, so besteht $\mathfrak{a}_i$ genau aus den Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ x_{11} & \cdots & x_{1,\,p-q} & \\ \cdot & \cdots & \cdot & \\ x_{q1} & \cdots & x_{q,\,p-q} & 0 \end{bmatrix},$$

[19]) Lit. [7].

$\mathfrak{L}_i$ aus den Matrizen

$$\begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & y_{11} & \cdots & y_{1q} \\ & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & y_{q1} & \cdots & y_{qq} \end{bmatrix},$$

und, wie wir annehmen dürfen (D. n°s 15 und 20), $\mathfrak{a}_i'$ aus den Matrizen

$$x = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ x_{11} & \cdots & x_{1\pi} & \\ \cdot & \cdots & \cdot & \\ x_{q1} & \cdots & x_{q\pi} & 0 \end{bmatrix},$$

wo $\pi \leqq p - q$ ist. Es sei $\pi = qk + c$ $(k \geqq 0 \leqq c < q)$, dann kann man x in der Form $x = \sum_{g=0}^{k} x_g a_g$ schreiben, wo

$$a_0 = q\left\{\begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}\right., \quad a_1 = q\left\{\begin{bmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}\right., \ldots, a_k = q\left\{\begin{bmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}\right.,$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{c} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{c}\underbrace{\qquad\qquad}_{q} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{q}\underbrace{\qquad}_{p-\pi}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & 0 \\ & x_{11} & \cdots & x_{1c} & y_{1,c+1} & \cdots & y_{1q} \\ & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & x_{q1} & \cdots & x_{qc} & y_{q,c+1} & \cdots & y_{qq} \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & x_{1,c+1} & \cdots & x_{1,c+q} \\ & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & x_{q,c+1} & \cdots & x_{q,c+q} \end{bmatrix}, \ldots, x_k = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & x_{1,\pi-q+1} & \cdots & x_{1\pi} \\ & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & x_{q,\pi-q+1} & \cdots & x_{q\pi} \end{bmatrix}.$$

Die $(x_g)_{g \geqq 0}$ gehören zu $\mathfrak{L}_i$, aber *während die* $(x_g)_{g>0}$ *durch* x *eindeutig bestimmt sind, ist* x_0 *nur bis auf ein additives Element* $u \in \mathfrak{L}_i$ *mit* ua_0 *bestimmt.* Es sei $\mathfrak{Z}$ ein Komplex aus $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{Z}_L$ $(\mathfrak{Z}_R)$ der Links (Rechts)-Annihilator von $\mathfrak{Z}$. Dann ist $x_0 \bmod (a_0)_L \cap \mathfrak{L}_i$ eindeutig bestimmt. Wenn $u \in (a_0)_L \cap \mathfrak{L}_i$ ist, so folgt aus (10_1), daß $0 = (ua_0)\,\mathfrak{o}_1 = u(a_0\mathfrak{o}_1)$, anders gesagt, daß

$$a_0\mathfrak{o}_1 < \{(a_0)_L \cap \mathfrak{L}_i\}_R \cap \mathfrak{a}_i' \tag{14a}$$

sein muß. Umgekehrt rechnet man leicht nach, daß (10_1) *erfüllt ist, wenn die Produkte* $a_g\mathfrak{o}_1$ *so gewählt werden, daß neben* $a_g\mathfrak{o}_1 < \mathfrak{a}_i'$ *auch* (14a) *gilt.* Wir bemerken, daß die rechte Seite der Relation (14a) von der gesuchten Verknüpfung $\mathfrak{a}_i'\mathfrak{o}_1$ nicht abhängt. Analoge Betrachtungen führen bei (10_2) ans Ziel, wenn man $\mathfrak{b}_j'$ in der Form $\mathfrak{b}_j' = \sum_{h=0}^{l} b_h \mathfrak{R}_h$ schreibt, wobei für ein Element $y = \sum_{h=0}^{l} b_h y_h \in \mathfrak{b}_j'$ die $(y_h)_{h>0}$ durch y eindeutig bestimmt sind, y_0 aber nur $\bmod (b_0)_R \cap \mathfrak{R}_j$. Die zu (14a) analoge Forderung lautet

$$\mathfrak{o}_1 b_0 < \{(b_0)_R \cap \mathfrak{R}_j\}_L \cap \mathfrak{b}_j'. \tag{14b}$$

Die Bedingung (11) setzen wir als erfüllt voraus (vgl. D. n° 19). Zur Erklärung der Verknüpfung von $\mathfrak{a}_i'$ mit $\mathfrak{b}_j'$ denke man sich die $(k+1)(l+1)$ Produkte $a_g b_h \in \mathfrak{d}_{ij}$ vorgegeben und xy durch

$$\left(\sum_{g=0}^{k} x_g a_g\right)\left(\sum_{h=0}^{l} b_h y_h\right) = \sum_{g=0}^{k}\sum_{h=0}^{l} x_g (a_g b_h) y_h \tag{15}$$

definiert. Damit diese Erklärung eindeutig wird, muß man

$$\sum_{h=0}^{l} u(a_0 b_h)\, y_h = \sum_{g=0}^{k} x_g (a_g\, b_0)\, v = 0 \; (u \in (a_0)_L \frown \mathfrak{L}_i,\; v \in (b_0)_R \frown \mathfrak{R}_j)$$

fordern, anders gesagt

$$(16) \qquad (a_0 b_h)_{h \geqq 0} < \{(a_0)_L \frown \mathfrak{L}_i\}_R \frown \mathfrak{d}_{ij},\; (a_g b_0)_{g \geqq 0} < \{(b_0)_R \frown \mathfrak{R}_j\}_L \frown \mathfrak{d}_{ij}.$$

Man erkennt jetzt leicht, *daß* (12) *als Folge von* (11) *und* (15), (16) *erfüllt ist.* Auf die Bedingungen (13) kommen wir im Abschnitt 6 zurück.

5. Jetzt untersuchen wir, wann ein Ring $\mathfrak{o}$, der rein formal durch Zusammensetzung gemäß (1) bis (3) konstruiert wurde, mit einer zwischen den einzelnen Teilen bestehenden und den Assoziativgesetzen (10) bis (13) genügenden Verknüpfung (5), auch die übrigen Bedingungen erfüllt, die im zweiten Abschnitt an $\mathfrak{o}$ gestellt wurden. Dabei setzen wir die MRI und MLI Bedingung und die einschlägigen Bedingungen für die Teilmatrizenringe $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{L}_i + \mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{D}_j = \mathfrak{R}_j + \mathfrak{b}_j$ als gültig voraus. Es sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{L} + \mathfrak{a} + \mathfrak{o}_1$, entsprechend der Produkttafel im Abschnitt 2. Dann ist zwar nach Konstruktion $\mathfrak{o}_1 = e'_L \frown e'_R$. Aber man erkennt nachträglich leicht, daß $\mathfrak{o}_1 = e'_R$ ist, da e' eine Linkseins von $\mathfrak{L} + \mathfrak{a}$ ist. Entsprechend ist $e''_L \frown e''_R = e''_L$.

Wir zeigen zuerst, daß $\mathfrak{o} = \mathfrak{L} + \mathfrak{a} + e'_R$ $(\mathfrak{o} = \mathfrak{R} + \mathfrak{b} + e''_L)$ *genau dann eine links (rechts)-seitige Zerlegung ersten Grades ist, wenn* e'_R (e''_L) *kein idempotentes minimales Links (Rechts)-ideal* $\mathfrak{l}$ $(\mathfrak{r})$ *besitzt, für das* $\mathfrak{a}\mathfrak{l} = 0$ $(\mathfrak{r}\mathfrak{b} = 0)$ *gilt.* Die Notwendigkeit ergibt sich daraus, daß ein Linksideal $\mathfrak{l}$ in e'_R mit $\mathfrak{a}\mathfrak{l} = 0$ auch ein Linksideal in $\mathfrak{o}$ ist und daher zu $\mathfrak{L} + \mathfrak{a}$ gehören muß, falls es minimal (in e'_R, also auch in $\mathfrak{o}$) und idempotent ist, was ein Widerspruch zu $(\mathfrak{L} + \mathfrak{a}) \frown e'_R = 0$ ist. Umgekehrt sei $\mathfrak{l}$ ein minimales Linksideal von $\mathfrak{o}$ und x ein Element von $\mathfrak{l}$. Es sei $x = y + z$, $(y \in \mathfrak{L} + \mathfrak{a}, z \in e'_R)$. Dann ist $e'x = y \in \mathfrak{l}$, da $\mathfrak{l}$ ein Linksideal ist. Somit ist auch $z \in \mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \frown (\mathfrak{L} + \mathfrak{a}) + \mathfrak{l} \frown e'_R$. Wenn $\mathfrak{l} \frown (\mathfrak{L} + \mathfrak{a}) \neq 0$ ist, so muß $\mathfrak{l} \frown (\mathfrak{L} + \mathfrak{a}) = \mathfrak{l}$ sein, da $\mathfrak{l}$ minimal ist. Danach ist $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L} + \mathfrak{a}$. Wenn $\mathfrak{l} \frown (\mathfrak{L} + \mathfrak{a}) = 0$ ist, so bedeutet dies, daß $\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \frown e'_R < e'_R$ ist. Daher ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{l} < \mathfrak{a} \frown \mathfrak{l} < \mathfrak{a} \frown e'_R = 0.$$

Ein nicht in $\mathfrak{L} + \mathfrak{a}$ enthaltenes idempotentes minimales Linksideal $\mathfrak{l}$ von $\mathfrak{o}$ muß also, falls es überhaupt existiert, zu e'_R gehören und $\mathfrak{a}\mathfrak{l} = 0$ erfüllen. Wenn e'_R solche Linksideale nicht besitzt, so gehört jedes idempotente minimale Linksideal von $\mathfrak{o}$ zu $\mathfrak{L} + \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{l}$ dagegen ein nilpotentes minimales Linksideal von $\mathfrak{o}$, das nicht in $\mathfrak{L} + \mathfrak{a}$ liegt, und wäre $\mathfrak{l}$ (bezüglich $\mathfrak{o}$ als Linksoperatorenbereich) isomorph zu einem idempotenten minimalen Linksideal $\mathfrak{l}_0$, so ergäbe sich wegen $\mathfrak{l}_0 < \mathfrak{L} + \mathfrak{a}$ $e'\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_0$ und $\mathfrak{l} < e'_R$, $e'\mathfrak{l} = 0$ aus der Operatorisomorphie der Widerspruch $\mathfrak{l}_0 = 0$. Dies zeigt, daß jedes zu einem idempotenten minimalen Linksideal von $\mathfrak{o}$ isomorphe nilpotente Linksideal von $\mathfrak{o}$ zu $\mathfrak{L} + \mathfrak{a}$ gehört.

Wir erhalten auf diese Weise genau alle Ringe, die eine mit den genannten Bedingungen verträglich vorgegebene linksseitige Zerlegung ersten Grades besitzen. Es verbleibt das Problem, unter diesen Ringen diejenigen auszusondern, deren linksseitige Zerlegung ersten Grades zugleich ein Grenzfall einer zweiseitigen Zerlegung ersten Grades in der Terminologie des Abschnitts 2 darstellt, wo $\mathfrak{o}$ kein idempotentes minimales Rechtsideal besitzt. Da jedes Rechtsideal von e'_R ein Rechtsideal in $\mathfrak{o}$ ist, so ergibt sich als notwendige Bedingung die, *daß* e'_R *auch kein idempotentes minimales Rechtsideal (von* e'_R*) besitzen darf.*

Wenn $\mathfrak{o}$ als *Nachbildung einer zweiseitigen Zerlegung ersten Grades konstruiert* wurde, so müssen $e'_R = \mathfrak{R} + \mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1$ und $e''_L = \mathfrak{L} + \mathfrak{a}' + \mathfrak{o}_1$ die oben gestellten Forderungen

erfüllen, damit die Zerlegung tatsächlich jenen Charakter hat. Dazu genügt es aber, zu verlangen, daß $\mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1$ *kein idempotentes minimales Linksideal* $\mathfrak{l}$ *mit* $\mathfrak{a}'\mathfrak{l} = 0$ *und* $\mathfrak{a}' + \mathfrak{o}_1$ *kein idempotentes minimales Rechtsideal* $\mathfrak{r}$ *mit* $\mathfrak{r}\mathfrak{b}' = 0$ *besitzt.* Denn ist $\mathfrak{l}$ ein idempotentes minimales Linksideal von $e'_R = \mathfrak{R} + \mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{l} = 0$ und $x = y + z$ ein Element von $e'_R (y \in \mathfrak{R}, z \in \mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1)$, so folgt $e'' x = e'' y + 0 = y \in \mathfrak{l}$, da $\mathfrak{l}$ ein Linksideal von e'_R (sogar von $\mathfrak{o}$) ist. Demnach ist $\mathfrak{l} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{l} + (\mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1) \cap \mathfrak{l}$. Wenn $(\mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1) \cap \mathfrak{l} = 0$ ist, so ist $\mathfrak{l} < \mathfrak{R}$ und damit (D. n° 8) $\mathfrak{l} = \Sigma \mathfrak{l} \cap \mathfrak{R}_j$. Es gäbe also ein $\mathfrak{D}_j$ mit $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{D}_j \neq 0$. Da $\mathfrak{D}_j$ ein zweiseitiges Ideal ist, wäre $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{D}_j = \mathfrak{l}$, d. h. $\mathfrak{l} < \mathfrak{D}_j$. Da $\mathfrak{b}_j \neq 0$ für jedes j sein soll, so wäre $\mathfrak{l}$ vom Quadrat Null (D. n° 8), während doch $\mathfrak{l}$ idempotent ist. Es ist also

$$(\mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1) \cap \mathfrak{l} \neq 0,$$

und da $\mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1$ ein Linksideal von e'_R und $\mathfrak{l}$ minimal ist, so hat man $\mathfrak{l} < \mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1$.

6. Hinsichtlich der Bedingungen (13) beschränken wir uns darauf, daß $\mathfrak{o}_1$ ein hyperkomplexes System mit der Basis $(e_f)_{1 \leq f \leq \omega}$ über einem Körper P ist, der auch zum Operatorenbereich von $\mathfrak{o}$ gehört. Es sei

$$(17) \qquad a_g e_f = \sum_{g'=0}^{k} u_{gfg'} a_{g'}, \quad e_f b_h = \sum_{h'=0}^{l} b_{h'} v_{h'fh},$$

wobei $u_{gfg'} \in \mathfrak{L}_i$, $v_{h'fh} \in \mathfrak{R}_j$ ist. Dann ist (13_3) gleichbedeutend mit

$$(18) \qquad \sum_{g'=0}^{k} u_{gfg'} (a_{g'} b_h) = \sum_{h'=0}^{l} (a_g b_{h'}) v_{h'fh}.$$

Wir wollen uns hier nur mit dem Fall weiterbefassen, wo $\mathfrak{o}_1$ bereits nilpotent, also im Radikal $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{o}$ enthalten ist; dann ist $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{T}$. Außerdem nehmen wir zur Vereinfachung an, daß $\mathfrak{T}^3 = 0$ ist. Überträgt man dies auf $(13_{1,2})$, so ergeben sich die Bedingungen

$$(19) \qquad a_g(\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_1) = 0, \quad (\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_1) b_h = 0,$$

$$(20\text{a}) \qquad \sum_{g'=0}^{k} u_{gfg'} u_{g'f'g''} \begin{cases} \in (a_0)_L \cap \mathfrak{L}_i & (g'' = 0) \\ = 0 & (g'' \neq 0), \end{cases}$$

$$(20\text{b}) \qquad \sum_{h'=0}^{l} v_{h''f'h'} v_{h'fh} \begin{cases} \in (b_0)_R \cap \mathfrak{R}_j & (h'' = 0) \\ = 0 & (h'' \neq 0). \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (19) dürfen in (20) diejenigen Relationen weggelassen werden, die zu Indizes f, f' gehören, für welche $e_f, e'_f \in \mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_1$ ist.

Nachträglich erkennt man, daß die Bedingungen (19), (20), sowie die mit (18) wegen $a_g e_f b_h \in \mathfrak{T}^3 = 0$ äquivalenten Gleichungen

$$(18') \qquad \sum_{g'} u_{gfg'} (a_{g'} b_h) = \sum_{h'} (a_g b_{h'}) v_{h'fh} = 0$$

miteinander verträglich sind, auch wenn $\mathfrak{T}^3 \neq 0$ ist (siehe unten), falls $\mathfrak{o}_1$ mit einem Nilpotenz-Exponenten > 3 vorgegeben wird. Der Exponent von $\mathfrak{T}$ ist dann mit dem von $\mathfrak{o}_1$ identisch.

Zu den Hauptidempotenten von $\mathfrak{o}$ zurückkehrend, bemerken wir, daß diese in dem von uns jetzt betrachteten Spezialfall die Form $e = \varepsilon - rs + r + s$ besitzen. Für ein Element des durch e zerstörten Teils von $\mathfrak{o}$ ergibt sich nach (9) und (17) der Ausdruck

$$(21) \qquad x - ex - xe + exe = -\sum_{ijfg'} w_f u_g^{(i)} u_{gfg'}^{(i)} a_{g'}^{(i)} - \sum_{jh'fh} b_{h'}^{(j)} v_{h'fh}^{(j)} v_h^{(j)} w_f + x_6,$$

falls r, s und die $\mathfrak{o}_1$-Komponente von x wie folgt dargestellt sind:

$$(22) \qquad r = \sum_{i=1}^{n} \sum_{g=0}^{k} u_g^{(i)} a_g^{(i)}, \quad s = \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=0}^{l} b_h^{(j)} v_h^{(j)}, \quad x_6 = \sum_{f=1}^{\omega} w_f e_f,$$

wobei $(u_g^{(i)})_{g \geq 0} < \mathfrak{L}_i$, $(v_h^{(j)})_{h \geq 0} < \mathfrak{R}_j$, $(w_f)_{1 \leq f \leq \omega} < P$ ist und der Index i bzw. j das Bezogensein auf $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{L}_i + \mathfrak{a}_i$ bzw. $\mathfrak{D}_j = \mathfrak{R}_j + \mathfrak{b}_j$ angibt.

Da $\mathfrak{o}_1$ nilpotent ist, enthält $\mathfrak{a}' + \mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1$ kein idempotentes Ideal $\neq 0$. Auf Grund der Betrachtungen des Abschnitts 5 realisiert daher jeder Ring $\mathfrak{o}$, der gemäß den angegebenen Bedingungen konstruiert wurde, eine zweiseitige Zerlegung gegebener Beschaffenheit, wenn er MRLI Ring (z. B. hyperkomplexes System mit einer endlichen Basis über P) ist. Dies gilt sogar einschließlich der Grenzfälle. Falls $\mathfrak{o}$ als linksseitige Zerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{L} + \mathfrak{a} + e'_R$ konstruiert wird, so enthält es kein idempotentes minimales Rechtsideal, wenn es MRLI Ring ist. Denn andernfalls existierte nach Abschnitt 2 eine zweiseitige Zerlegung von $\mathfrak{o}$, die man (bei gegebenem $\mathfrak{L}$) so einrichten könnte (D. n° 13), daß $e'_R = \mathfrak{R} + \mathfrak{b}' + \mathfrak{o}_1$ $(\mathfrak{R} \neq 0)$ ist, was im Widerspruch zur vorausgesetzten Nilpotenz von e'_R steht. Also realisiert jeder als Nachbildung einer links (rechts)-seitigen Zerlegung konstruierte Ring den links (rechts)-seitigen Grenzfall einer zweiseitigen Zerlegung, sobald $e'_R(e''_L)$ nilpotent ist.

Das im 1. Abschnitt konstruierte hyperkomplexe System ist ein Beispiel für einen linksseitigen Grenzfall, bei dem $n = 1$, $k = 0$ ist. Alle linksseitigen Grenzfälle erhält man, indem man in den Forderungen des 4. Abschnitts $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{d} = \mathfrak{b}' = 0$ setzt. Von den Forderungen (18′) bis (20) des gegenwärtigen Abschnitts bleiben nur (19_1), (20a) übrig. In (21) verschwindet der Term mit $b_h^{(j)}$. Nichtentartete zweiseitig zerlegte Ringe lassen sich leicht konstruieren, falls man die mit (11) und (16), (18′) verbundenen Schwierigkeiten durch die Annahme $\mathfrak{d} = 0$ vermeidet. Von dieser Art ist das Beispiel im 4. Abschnitt.

Literatur.

[1] *M. Deuring*, Algebren, Ergebnisse IV, I. Berlin 1935.
[2] *L. E. Dickson*, Algebren und ihre Zahlentheorie. Zürich 1927.
[3] *J. Dieudonné*, Sur les systèmes hyperkomplexes. Journ. f. r. u. a. Math. **184** (1942), 178—192.
[4] *J. Dieudonné*, Bull. Soc. math. France **70** (1942), 46—75.
[5] *Ch. Hopkins*, Rings with minimal condition for left ideals. Ann. of Math. **40** (1939), 712—730.
[6] *G. Köthe*, Die Struktur der Ringe usw., Math. Ztschr. **32** (1930), 161—186.
[7] *R. M. Thrall*, A class of algebras without unity element. Can. J. Math. **7** (1955), 382—390.

Eingegangen 4. August 1956.

On the Limit Theorems for Convolutions of Distribution Functions. I.

An Analysis in the Weierstrass Norm.

By *Harald Bergström* in Göteborg.

1. Introduction.

The classical limit problem in the theory of probability can generally be stated as follows.

Given sequences $X_1(n), X_2(n), \ldots, X_k(n), \ldots$ for $n = 1, 2, \ldots$ of random variables which are independent within each sequence and a sequence $\{k_n\}$ of positive non-decreasing[1]) integers tending to ∞ as n tends to ∞. Consider sums

$$X_{\lambda k}(n) = X_{\lambda+1}(n) + \cdots + X_k(n),$$

$0 \leqq \lambda < k \leqq k_n$. When does the d. f. (read distribution function) of $X_{0k_n}(n)$ converge weakly, i. e. in every continuity point of $G(x)$ to a d. f. $G(x)$?

This problem has been studied by many authors and important contributions to its solution have been given by Bernoulli, Moivre, Chebyshev, Lyaponov, Lindeberg, Kolmogorov, Lévy, Doeblin, Feller, Khintchine, Bowly, Loève and others[2]).

We shall here study the problem under the following restriction:

Condition (C). As $n \to \infty$, the d. f. of $X_k(n)$ shall tend to a d. f. $F_k(x)$ in every continuity point of $F_k(x)$ and this shall hold uniformly in respect to k for any point x, which is a continuity point of all $F_k(x)$. Further $F_k(x)$ shall tend to $\varepsilon(x)$ as k tends to ∞, where $\varepsilon(x)$ is that improper d. f. which is 1 for $x > 0$ and 0 for $x < 0$ (and $\frac{1}{2}$ for $x = 0$).

Bowly, Khintchine and others use the stronger restriction that all $F_k(x)$ are equal to $\varepsilon(x)$. For the solution we shall use an essentially new method, which seems to lay bare the nature of the limit theorems. Our method is elementary and can be described as follows.

The d. f. $F_{\lambda k}(n, x)$ of $X_{\lambda k}(n)$ is a convolution

$$F_{\lambda k}(n, x) = F_{\lambda+1}(n, x) * \cdots * F_k(n, x) \tag{1. 1}$$

of the d. f.'s $F_j(n, x)$ of $X_j(n)$. Here the convolution is an associative and commutative operation. We want to find conditions for the convergence of $F_{0k_n}(n, x)$ to a d. f. $F(x)$ in all continuity points of $F(x)$. Now the convergence problem for a product

$$A_{0k_n}(n) = A_1(n) \cdots A_{k_n}(n)$$

of numbers is closely connected with the convergence problem for the sum

$$a_{0k_n}(n) = [A_1(n) - 1] + [A_2(n) - 1] + \cdots + [A_{k_n} - 1].$$

[1]) The assumption that $\{k_n\}$ is non-decreasing is not essential.

[2]) For a survey of the limit problems and the limit theorems we refer to Gnedenko-Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variable (1954), where also historical aspects can be found.

In the same way the convergence problem for the convolution (1. 1) is closely connected with the convergence problem for the sum

$$(1.\,2)\quad f_{0k_n}(n, x) = [F_1(n, x) - \varepsilon(x)] + [F_2(n, x) - \varepsilon(x)] + \cdots + [F_{k_n}(n, x) - \varepsilon(x)].$$

In fact, most of the known limit theorems give statements about this connection only. We have studied this connection by the help of algebraic identities. This means that our method is general, i. e. it may be used for „convolution products" as well as for products of probability generating functions numbers or even abstract elements. In order to consider limit theorems in the mentioned form we must introduce some norm-function. We shall here study the limit problem for convolutions of d. f.'s only. A suitable norm is then the function of σ

$$N_\sigma[f(x)] = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| f(x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right|,$$

where $\Phi(x)$ denotes the normal d. f. This norm, which shall be called the Weierstrass norm (we write shorter „W-norm"), has a meaning for d. f.'s but also for other functions. When we give relations in this norm we shall always assume that the relations hold for all $\sigma > 0$ if we don't give any restrictions.

All d. f.'s $F(x)$ and the functions $f_{0k_n}(n, x)$, defined above, belong to the class of functions which are finite and non-decreasing for $x \neq 0$. We shall call such functions quasi-distribution functions (q. d. f.'s). They can be divided into subclasses. One important class is formed by all d. f.'s, another by all q. d. f.'s which tend to 0 as $x \to \pm\infty$. The latter q. d. f.'s are called normal q. d. f.'s, and we denote the class of all such functions by Q. The subclass of all bounded functions belonging to Q is denoted by Q_0. We study sequences $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) \in Q_0$, and introduce Cauchy convergence in the W-norm. Then we can prove the first fundamental theorem (see Section 9).

A sequence $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) \in Q_0$, is Cauchy convergent in the W-norm, if and only if $f_n(x)$ tends weakly to a normal q. d. f. $f(x)$ and also the „truncated" central moments $\int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df_n(x)$, $\nu = 1, 2$, tend to finite values $a_\nu(\eta)$ as $n \to \infty$ for all η such that $\pm\eta$ are continuity points of $f(x)$.

The same theorem holds for sequences of d. f.'s, if we change „to a normal q. d. f. $f(x)$" against „to a d. f. $f(x)$". The conditions for the truncated moments are trivial for d. f.'s $f_n(x)$ but not for $f_n(x) \in Q_0$.

The connection between the convolutions and their associated normal q. d. f.'s can now be obtained by the help of algebraic identities and the W-norm. It is sufficient to consider so-called centered C-sequences $\{F_k(n, x)\}$, which satisfy the condition (C) and also the inequality

$$(1.\,3)\qquad \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int\limits_{|x| \leq \eta} x\, dF_k(n, x)\right| < \infty \text{ for } \eta < \infty.$$

Then we can prove the second fundamental theorem (see Section 17).

In order that $F_{0k}(n, x)$ tend weakly to a d. f. $F^{(1)}(x)$ and $F_{kk_n}(n, x)$ tend weakly to a d. f. $F^{(2)}(x)$ as first n and then k tend to ∞, it is necessary and sufficient that $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ be Cauchy convergent in the W-norm.

We observe that the conditions for the Cauchy convergence are given by the first fundamental theorem.

The limit $F^{(1)}(x)$ is uniquely determined as the weak limit of the infinite convolution product $F_1(x) * F_2(x) * \cdots * F_k(x) * \cdots$, when $F^{(1)}(x)$ exists as a d. f.

The limit $F^{(2)}(x)$ is uniquely determined by the weak limits[3]) $f^{(2)}(x)$, $\alpha_1^{(2)}(\eta)$ and $\alpha_2^{(2)}(\eta)$ of respectively $f_{kk_n}(n, x)$, $\int\limits_{|x| \leq \eta} x\,df_{kk_n}(n, x)$ and $\int\limits_{|x| \leq \eta} x^2\,df_{kk_n}(n, x)$ as first n and then k tend to ∞. These limits always exist when $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm. If $f^{(2)}(x)$ exists and $\alpha_1^{(2)}(\eta)$ and $\alpha_2^{(2)}(\eta)$ exist for some value $\eta > 0$ such that $\pm\,\eta$ are continuity points of $f^{(2)}(x)$ they exist for all such values $\eta > 0$.

If for instance $F_k(n, x) = \Phi(x\sqrt{n})$, $k_n = n$, we have $F^{(2)}(x) = \Phi(x)$, $f^{(2)}(x) = 0$, $\alpha_1^{(2)}(\eta) = 0$, $\alpha_2^{(2)}(\eta) = 1$ (and $F^{(1)}(x) = \varepsilon(x)$).

If all $F_k(x) = \varepsilon(x)$, the second fundamental theorem may be stated in the following simple form.

If one of the sequences $\{F_{0k_n}(n, x)\}$ and $\{f_{0k_n}(n, x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm, then this is also true for the other sequence. (The last mentioned facts are proved in section 16.)

When $\{F_k(n, x)\}$ is a C-sequence but not necessarily centered and $F_{0k}(n, x)$ tends weakly to a d. f. $F^{(1)}(x)$ and $F_{kk_n}(n, x)$ tends weakly to a d. f. $F^{(2)}(x)$ as first n and then k tend to ∞, then $f_{0k_n}(n, x)$ necessarily tends weakly to a normal q. d. f. $f(x)$. Let this limit exist and let η_0 be a positive number such that $\pm\,\eta_0$ are continuity points of all $F_k(x)$ and of $f(x)$. Putting

$$m_k(n) = \int\limits_{|x| \leq \eta_0} x\,dF_k(n, x)$$

and introducing the normalized d. f.'s $V_k(n, x) = F_k(n, x + m_k(n))$, we can state (see Section 18):

In order that $F_{0k}(n, x)$ tend weakly to a d. f. $F^{(1)}(x)$ and $F_{kk_n}(n, x)$ tend weakly to a d. f. $F^{(2)}(x)$ as first n and then k tend to ∞, it is necessary and sufficient that the following conditions hold:

1° *$\{V_k(n, x)\}$ is centered,*

2° *$\{v_{0k_n}(n, x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm,*

3° *$\sum\limits_{i=1}^{k} m_i(n)$ and $\sum\limits_{i=k+1}^{k_n} m_i(n)$ tend to finite limits as first n and then k tend to ∞.*

When $F_{kk_n}(n, x)$ tends weakly to a d. f. $F^{(2)}(x)$, this d. f. is infinitely divisible and the class of all such limits $F^{(2)}(x)$ coincides with the class of infinitely divisible d. f.'s (generalization of the theorem of P. Lévy-Khintchine; see Section 13).

Our theory may be generalized to n-dimensional distribution functions, and this can be done without any essentially new computations.

As we have mentioned above our method is elementary. In order to emphasize this, we have made the paper self-contained beyond elementary calculus of real variables. In the sections 2 to 9 we study sequences of d. f.'s and q. d. f.'s by the help of the W-norm, and in the following sections we consider the limit problems for convolutions.

---

[3]) Generally we say that a convergence of a sequence of functions is weak if it holds in all points with the exception of at most an enumerable set of points.

2. Distribution functions.

A function $F(x)$ is called a distribution function (d. f.), when it is non-decreasing in every point and has the properties $F(x) \to 1\,(x \to \infty)$, $F(x) \to 0\,(x \to -\infty)$.

Since $F(x)$ is non-decreasing and bounded, the limits $F(x-0)$ and $F(x+0)$ exist in every point. If $F(x+0) - F(x-0) > 0$, the point x is a discontinuity point of $F(x)$. We define

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\,[F(x-0) + F(x+0)]$$

in the discontinuity points x[4]).

A discontinuity point a is called an ordinary discontinuity point, if the function has finite limits, when x tends to $a-0$ and $a+0$. All discontinuity points of a d. f. thus are ordinary.

Let x_k be a discontinuity point of the d. f. $F(x)$, and introduce the jump

$$p(x_k) = F(x_k+0) - F(x_k-0).$$

Obviously, there exists a finite number of discontinuity points x_k, for which $\frac{1}{n+1} \leqq p(x_k) < \frac{1}{n}$, if n is any positive integer. Therefore $F(x)$ has at most an enumerable set of discontinuity points.

A well known d. f. is the normal d. f. Suitably normed, it is given by

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

We shall also frequently use the so-called improper d. f. $\varepsilon(x)$, defined by

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x < 0, \\ \tfrac{1}{2} \text{ for } x = 0, \\ 1 \text{ for } x > 0. \end{cases}$$

Remark. In the theory of probability the distribution function of a random variable is defined by $Pr(X < x)$. Obviously $Pr(X < x)$ is a d. f. in the sense used above. Conversely a random variable can be associated to every such d. f.

3. The linear set $V(D)$ and some of its subclasses. Quasi-distribution functions.

The set of all d. f.'s shall be denoted by D. We shall consider the linear set $R(D)$ generated by D over the real numberfield, i. e. the set of all functions

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} a_k F_k(x), \tag{3. 1}$$

a_k real, $F_k(x) \in D$, $k = 1, 2, \ldots, r$; r finite.

We call the right side a representation of $f(x)$ in $R(D)$. It may be observed that $f(x) \in R(D)$ always has a representation of the form

$$f(x) = aG(x) + bH(x), \tag{3. 2}$$

$G(x) \in D$, $H(x) \in D$, a, b real, since for a representation (3. 2) we may choose

$$a = \sum_{a_k > 0} a_k, \quad b = \sum_{a_k < 0} a_k,$$

[4]) The definitions $F(x) = F(x+0)$ and $F(x) = F(x-0)$ are also used. The definition given here is more suitable for our method.

and

$$G(x) = \frac{1}{a} \sum_{a_k > 0} a_k F_k(x), \quad H(x) = \frac{1}{b} \sum_{a_k < 0} a_k F_k(x),$$

if $a \neq 0$, $b \neq 0$; if $a = 0$, we drop the first term in (3. 2) and if $b = 0$ we drop the second term. $G(x)$ and $H(x)$ as mean values of d. f.'s are themselves d. f.'s.

A d. f. has a representation of the form

$$F(x) = aF_d(x) + bF_c(x), \tag{3. 3}$$

where $F_d(x)$ is a d. f., which is a pure step-function and $F_c(x)$ is a continuous d. f. In fact, we can define $F_d(x)$ and $F_c(x)$ in the following way.

If $F(x)$ is continuous, we put $F_c(x) = F(x)$. If $F(x)$ has discontinuity points t_k, $k = 1, 2, \ldots$, with the jumps $p(t_k)$:

$$F(t_k + 0) - F(t_k) = \tfrac{1}{2}\, p(t_k), \; F(t_k) - F(t_k - 0) = \tfrac{1}{2}\, p(t_k),$$

we define

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} p(t_k), \quad F_d(x) = \frac{1}{c} \left\{ \sum_{t_k < x} p(t_k) + \frac{1}{2}\, p(x) \right\},$$

where $p(x)$ is the jump in the point x ($p(x) = 0$, if x is a continuity point of $F(x)$). Further we define

$$F_c(x) = \frac{1}{1-c} \{F(x) - cF_d(x)\}.$$

Then it is easily seen that $F_c(x)$ is a continuous d. f., and that the relation (3. 3) holds with $a = c$, $b = 1 - c$.

If $F(x)$ is a d. f., we put $\overline{F(x)} = 1 - F(-x)$ and call $\overline{F(x)}$ the conjugate of $F(x)$. If $\overline{F(x)} = F(x)$, $F(x)$ is called symmetric.

The substitution $F(x) \to \overline{F(x)}$ for all $F(x)$ defines an isomorphism of D, which is also an isomorphism of $R(D)$. This isomorphism has the order 2 since $\overline{(F(x))} = F(x)$.

We also introduce the class $V(D)$ of all functions $f(x) + c$, $f(x) \in R(D)$, c any constant. $V(D)$ coincides with the class of functions of bounded variation, if every such function $\varphi(x)$ is defined as $\frac{1}{2}[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)]$ in its discontinuity points. This follows from the fact that a function of bounded variation is the difference between two bounded and monotone functions. For our purpose it is sufficient to introduce $V(D)$ as above.

The special functions $f(x) \in V(D)$ which are non-decreasing for $x \neq 0$ shall be called non-singular quasi-distribution functions (q. d. f.'s). In $x = 0$ a non-singular q. d. f. may have a finite negative jump. Those functions (not belonging to $V(D)$), which are finite and non-decreasing for $x \neq 0$ and infinite for at least one of the values $x = \pm 0$, shall be called singular q. d. f.'s. We shall also assume that any singular q. d. f. $f(x)$ satisfies the relation $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ for $x \neq 0$.

If a q. d. f. tends to 0 as $x \to \pm\infty$, we shall call it normal. It is easily seen that a non-singular normal q. d. f. $f(x)$ must have the form

$$f(x) = a[F(x) - \varepsilon(x)]$$

with a d. f. $F(x)$ and a non-negative constant a. The class of normal q. d. f.'s shall be denoted by Q and the class of non-singular normal q. d. f.'s by Q_0.

4. Riemann-Stieltjes integrals.

The Riemann-Stieltjes integral of a function $g(x)$ in respect to a function $f(x)$ is defined as follows.

Consider a net $(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b)$, with the largest meshbreadth d, which is fitted on (a, b), $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Form the sum

$$S_d = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,[f(x_i) - f(x_{i-1})], \tag{4. 1}$$

where ξ_i is any point in (x_{i-1}, x_i). If, as the number m is increased, subject to the condition, that d converges to 0, S_d tends to a definite limit, which is independent of the mode of subdivisions of the interval by the net and of the mode in which the sets of points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ are assigned in the net, $g(x)$ is said to have a (Riemann-) Stieltjes integral in respect to $f(x)$ on (a, b). The limit is called the Stieltjes integral and is denoted by

$$\int_a^b g(x)\,df(x).$$

The existence of the Stieltjes integral, when $g(x)$ is continuous and $f(x)$ is bounded and non-decreasing (non-increasing) in (a, b), is easily proved in the same way as the existence of the Riemann integral for continuous functions. By an Abelian transforming we get

$$\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,[f(x_i) - f(x_{i-1})] = -\sum_{i=1}^{n+1} f(x_{i-1})\,[g(\xi_i) - g(\xi_{i-1})] + g(b)\,f(b) - g(a)\,f(a),$$

if $\xi_{n+1} = b$, $\xi_0 = a$. By this relation, it is seen that $\int_a^b g(x)\,df(x)$ exists if $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ exists, and then the relation

$$\int_a^b g(x)\,df(x) + \int_a^b f(x)\,dg(x) = g(b)\,f(b) - g(a)\,f(a) \tag{4. 2}$$

is satisfied.

If $g(x)$ is integrable and $f(x)$ has a continuous derivative in (a, b), we get by (4. 1), using the mean value theorem for the difference $f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})$,

$$\int_a^b g(x)\,df(x) = \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx.$$

By the definition of the Stieltjes integrals, we find that the following relations hold, when the integrals on the right side are defined,

$$\int_a^b [g_1(x) + g_2(x)]\,df(x) = \int_a^b g_1(x)\,df(x) + \int_a^b g_2(x)\,df(x), \tag{4. 3}$$

$$\int_a^b g(x)\,d[f_1(x) + f_2(x)] = \int_a^b g(x)\,df_1(x) + \int_a^b g(x)\,df_2(x), \tag{4. 4}$$

$$\int_a^c g(x)\,df(x) = \int_a^b g(x)\,df(x) + \int_b^c g(x)\,df(x) \tag{4. 5}$$

(for $a \leqq b \leqq c$).

Consider the special case when $g(x)$ is continuous and $f(x)$ is a bounded non-decreasing pure step-function with the jumps $p(s_\lambda)$ in the points s_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots$ (the set of discontinuity points is enumerable). We suppose that a and b are continuity points

of $f(x)$ and fit a net to (a, b), where all meshpoints x_i are continuity points of $f(x)$ and the largest meshbreadth is so small that the oscillation of $g(x)$ in every mesh is smaller than a given number ε. Then

$$g(x_i)\,[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sum_{x_{i-1} < s_\lambda < x_i} g(x_i)\, p(s_\lambda),$$

$$|\, g(x_i) - g(s_\lambda)\,| < \varepsilon \text{ for } x_{i-1} < s_\lambda < x_i,$$

and thus

$$\left| \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,[f(x_i) - f(x_{i-1})] - \sum_{a < s_\lambda < b} g(s_\lambda)\, p(s_\lambda) \right| < \varepsilon [f(b) - f(a)].$$

This holds for any net and any $\varepsilon > 0$. Hence we get

$$\int_a^b g(x)\, df(x) = \sum_{a < s_\lambda < b} g(s_\lambda)\, p(s_\lambda). \tag{4. 6}$$

Stieltjes integrals are extended to infinite intervals, in the same way as Riemann integrals. If $F(x)$ and $G(x)$ are d. f.'s and $F(x)$ is continuous, the integral

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x - t)\, dG(t)$$

exists, since $\int_a^b F(x - t)\, dG(t)$ is bounded and non-decreasing as function of b and non-increasing as function of a. We easily find that $I(-\infty) = 0$, $I(+\infty) = 1$. Thus $I(x)$ is a d. f.

We shall use the notations

$$\int_{|x| \leqq \eta} g(x)\, df(x) = \int_{-\eta}^{\eta} g(x)\, df(x),$$

$$\int_{|x| \geqq \eta} g(x)\, df(x) = \int_{-\infty}^{-\eta} g(x)\, df(x) + \int_{\eta}^{\infty} g(x)\, df(x),$$

when the right sides have a meaning.

5. Weak convergence. Passing to weak limits under the integral sign.

A sequence of functions $\{f_n(x)\}$ in a finite or infinite interval (a, b) is here called weakly convergent if there exists a function $f(x)$ such that $f_n(x) \to f(x)$ in all points with the exception of at most an enumerable set of points. We use the notation

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \;\; (n \to \infty) \text{ in } (a, b),$$

if $f_n(x)$ converges weakly to $f(x)$, and call $f(x)$ the weak limit of $\{f_n(x)\}$. If $a = -\infty$, $b = \infty$, we drop „in (a, b)" in our notation. If the $f_n(x)$ are d. f.'s or q. d. f.'s and $f_n(x) \rightarrow f(x)$ $(n \to \infty)$, then $f_n(x)$ must converge in every continuity point x of $f(x)$, since

$$f_n(x_1) \leqq f_n(x) \leqq f_n(x_2) \text{ for } x_1 \leqq x \leqq x_2,$$

x_1 and x_2 of the same sign as $x \neq 0$, and since we can find x_1 and x_2 arbitrarily close to x and such that $f_n(x_1) \to f(x_1)$, $f_n(x_2) \to f(x_2)$ $(n \to \infty)$. On the other hand the discontinuity points of $f(x)$ form an enumerable set in these cases.

We can also consider weak convergence, when passing to the limit in a more general way (double limit and repeated limit for instance).

We shall require

Lemma 5. 1 [5]). *Let $F_n(x)$ be a sequence of d. f.'s and let $G(x)$ be a function, which is bounded and uniformly continuous in $(-\infty, \infty)$. Then the convergence $F_n(x) \to F(x)$ $(n \to \infty)$ with a d. f. $F(x)$ implies the convergence*

$$1^0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\, dF_n(t) \to \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\, dF(t)$$

uniformly in respect to x as $n \to \infty$.

Corollary 1. *The relation 1^0 also holds uniformly in respect to x for any finite interval (a, b) such that a and b are continuity points of $F(x)$. It holds for a finite interval (a, b) such that a and b are continuity points of $F(x)$ also if $G(x-t)$ is changed against any function $g(t)$, continuous in (a, b).*

Corollary 2. *The relation 1^0 of the lemma holds uniformly in respect to x for $-\infty < x < \infty$ for normal q. d. f.'s $F_n(x)$ and $F(x)$, if the interval of integration $(-\infty, \infty)$ is changed against any of the intervals $(-\infty, -\eta)$ or (η, ∞), where $\eta > 0$ and $\pm\eta$ are continuity points of $F(x)$.*

Proof. Let (a, b) be a finite interval, such that a and b are continuity points of $F(x)$, and let $G(x)$ be bounded and uniformly continuous in $(-\infty, \infty)$. Then to any given $\varepsilon > 0$ we may choose a positive number δ, so small that the oscillation of $G(x)$ on any interval of the length $< \delta$ is smaller than ε, and fit a net of intervals (ξ_{i-1}, ξ_i) of length $< \delta$ on (a, b),

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m = b.$$

By the definition and the properties of the Stieltjes integral we then have

$$(5.1) \qquad \left| \int_a^b G(x-t)\, dF_n(t) - \sum_{i=1}^{m} G(x-\xi_i)\, [F_n(\xi_i) - F_n(\xi_{i-1})] \right|$$
$$= \left| \sum_{i=1}^{m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} [G(x-t) - G(x-\xi_i)]\, dF_n(t) \right| < \varepsilon$$

for all x and n and all d. f.'s $F_n(x)$ (i. e. also for $F(x)$). Let now all ξ_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ be continuity points of $F(x)$ and choose $n_0(\varepsilon)$ so large that

$$|F_n(\xi_i) - F(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{2mA}, \quad A = 1 + \sup_{-\infty < x < \infty} |G(x)|$$

for $n > n_0(\varepsilon)$ and $i = 0, 1, \ldots, m$. Then we have

$$\left| \sum_{i=1}^{m} G(x-\xi_i)\, [F_n(\xi_i) - F_n(\xi_{i-1})] - \sum_{i=1}^{m} G(x-\xi_i)\, [F(\xi_i) - F(\xi_{i-1})] \right| < \varepsilon,$$

and thus, according to (5. 1),

$$(5.2) \qquad \left| \int_a^b G(x-t)\, [dF_n(t) - dF(t)] \right| < 3\varepsilon.$$

Hence 1^0 of the lemma holds for any finite interval.

---

[5]) This is a form of Helly-Bray's theorem. It may be observed, however, that we here consider uniform convergence in respect to translations.

If the interval of integration is $(-\infty, \infty)$, we choose a and b such that $F(a) < \frac{\varepsilon}{A}$, $1 - F(b) < \frac{\varepsilon}{A}$ and determine the net as before. Then

$$\left| \int_b^\infty G(x-t)\, dF_n(t) \right| < 2\varepsilon, \quad \left| \int_{-\infty}^a G(x-t)\, dF_n(t) \right| < 2\varepsilon,$$

for $n > n_0(\varepsilon)$, and these inequalities also hold if $F_n(t)$ is changed against $F(t)$. Thus 1° of the lemma is proved.

The first part of corollary 1 is proved by (5. 2) and the second part follows in the same way.

Corollary 2 may be proved as follows. Consider at first the interval $(-\infty, -\eta)$. Let $F(x)$ be a normal q. d. f. and $-\eta < 0$ a continuity point of $F(x)$. We choose a constant $c > F(-\eta)$. For sufficiently large n we then have $F_n(-\eta) < c$, if $F_n(x) \to F(x)$ $(n \to \infty)$. Putting $\mathring{F}_n(x)$ and $\mathring{F}(x)$ equal to $F_n(x)$ and $F(x)$ respectively for $x < -\eta$ and equal to c for $x > -\eta$, we find that $\frac{1}{c}\mathring{F}_n(x)$ and $\frac{1}{c}\mathring{F}(x)$, when suitably defined for $x = -\eta$, are d. f.'s. Applying Lemma 5. 1 we then get

$$\int_{-\infty}^\infty G(x-t)\, d\mathring{F}_n(t) \to \int_{-\infty}^\infty G(x-t)\, d\mathring{F}(t) \quad (n \to \infty)$$

uniformly in respect to x for $-\infty < x < \infty$ and hence, since $F_n(-\eta) \to F(-\eta)$ $(n \to \infty)$, also

$$\int_{-\infty}^{-\eta} G(x-t)\, dF_n(t) \to \int_{-\infty}^{-\eta} G(x-t)\, dF(t) \quad (n \to \infty)$$

uniformly in respect to x for $-\infty < x < \infty$. In the same way this relation is obtained for the interval (η, ∞).

At last we remark that Lemma 5. 1 and its corollaries also hold, when $F_n(x)$ is changed against $F_k(n, x)$ and double or repeated limits are considered. It is easily seen how the proofs may be changed in these cases.

6. The Weierstrass transform of d. f. 's.

If $F(x)$ is a d. f. we call

$$F(\sigma, x) = \int_{-\infty}^\infty \Phi\left(\frac{x-t}{\sigma}\right) dF(t) \tag{6. 1}$$

the Weierstrass transform of $F(x)$. According to (4. 2), it can also be given in the form

$$F(\sigma, x) = \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^\infty F(t)\, \Phi'\left(\frac{x-t}{\sigma}\right) dt = \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^\infty F(x-t)\, \Phi'\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt. \tag{6. 2}$$

Using the property (4. 3) of the Stieltjes integral and the definition of the derivative, we find that $F(\sigma, x)$ has continuous derivatives of any order ν and that

$$F^{(\nu)}(\sigma, x) = \frac{1}{\sigma^{\nu+1}}\int_{-\infty}^\infty \Phi^{(\nu)}\left(\frac{x-t}{\sigma}\right) dF(t). \tag{6. 3}$$

If $F(\sigma, x)$ is considered for small σ, it is usually called Weierstrass singular integral. By (6. 2) we get

$$|F(\sigma, x) - F(x)| = \left| F(\sigma, x) - \frac{1}{2}[F(x-0) + F(x+0)] \right|$$

$$= \frac{1}{\sigma} \left| \int_{-\infty}^{0} [F(x-t) - F(x+0)] \Phi'\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt + \int_{0}^{\infty} [F(x-t) - F(x-0)] \Phi'\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \{|F(x-t) - F(x-0)| + |F(x+t) - F(x+0)|\} + \int_{|t| > \frac{\varepsilon}{\sigma}} \Phi'(t)\, dt.$$

The quantity in brackets on the right side of the last inequality is arbitrarily small for sufficiently small $\varepsilon > 0$, and the last integral is arbitrarily small for sufficiently small $\sigma > 0$. Thus we obtain the well-known relation

$$F(\sigma, x) \to F(x), \quad (\sigma \to +0). \tag{6. 4}$$

A simple form has the Weierstrass transform of the normal d. f. It is

$$\frac{1}{\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x-t}{\sigma_1}\right) \Phi'\left(\frac{t}{\sigma_2}\right) dt = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \tag{6. 5}$$

with $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. We easily verify (6. 5), taking the derivatives on both sides and showing the relation

$$\frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-t}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sigma_2}\right)^2\right]} dt = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2},$$

which is obtained by the substitution

$$\frac{\sigma}{\sigma_1 \sigma_2}\left(t - \frac{x\sigma_2^2}{\sigma^2}\right) = v$$

in the integral.

7. Convolutions. Generalized Stieltjes integrals.

Let $F_1(x)$ and $F_2(x)$ be d. f.'s. Consider the integral

$$F_{02}(\sigma, x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma, x - t)\, dF_2(t).$$

We have proved in section 4 that $F_{02}(\sigma, x)$ is a d. f. We shall now show that the limit

$$F_{02}(x) = \lim_{\sigma \to +0} F_{02}(\sigma, x) \tag{7. 1}$$

always exists and is a d. f. [6]). Further we shall use the notation

$$F_{02}(x) = F_1(x) * F_2(x)$$

and call $F_{02}(x)$ the convolution of $F_1(x)$ and $F_2(x)$.

If $F_1(x)$ is continuous for all x, we find by Lemma 5. 1, when σ passes to 0 trough any sequence of positive numbers,

$$F_1(x) * F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x - t)\, dF_2(t),$$

and then, by (4. 2),

$$F_1(x) * F_2(x) = F_2(x) * F_1(x). \tag{7. 2}$$

[6]) If $F_1(x)$ and $F_2(x)$ are the d. f.'s of the independent random variables X_1 and X_2, then it can easily be shown that $F_{02}(x)$ is the d. f. of $X_1 + X_2$.

Particularly, we have

$$F(\sigma, x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) * F(x) = F(x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

and, by (6. 5),

$$\Phi\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma_2}\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

Let now $F_1(x)$ and $F_2(x)$ be d. f.'s, which are pure step-functions, and denote the discontinuity points of $F_1(x)$ and $F_2(x)$ by s_ν and t_λ and the corresponding jumps by $p(s_\nu)$ and $q(t_\lambda)$ respectively ($\nu = 1, 2, \ldots;\ \lambda = 1, 2, \ldots$). Then, by (4. 6), we have

$$F_1(\sigma, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - s_\nu}{\sigma}\right) p(s_\nu),$$

and hence

$$F_1(\sigma, x) * F_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - s_\nu - t_\lambda}{\sigma}\right) p(s_\nu)\, q(t_\lambda).$$

It may be observed that the double sum is uniformly convergent in respect to x and σ for all x and σ. As $\sigma \to +0$ we get

$$\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \to \begin{cases} 0 \text{ for } x < 0, \\ \frac{1}{2} \text{ for } x = 0, \\ 1 \text{ for } x > 0, \end{cases}$$

and thus, according to the definition of $F_1(x) * F_2(x)$,

$$F_1(x) * F_2(x) = \sum_{s_\nu + t_\lambda < x} p(s_\nu)\, q(t_\lambda) + \frac{1}{2} \sum_{s_\nu + t_\lambda = x} p(s_\nu)\, q(t_\lambda).$$

We observe that $F_1(x) * F_2(x)$ is a d. f. and satisfies (7. 2).

If $F(x)$ and $G(x)$ are any d. f.'s they have representations of the form

$$F(x) = a_c F_c(x) + a_d F_d(x), \quad G(x) = b_c G_c(x) + b_d G_d(x),$$

where $F_c(x)$ and $G_c(x)$ are continuous d. f.'s, $F_d(x)$ and $G_d(x)$ are d. f.'s, which are pure step-functions, and a_c, a_d, b_c, and b_d are non-negative constants. Then, by the definition (7. 1), we get

$$\begin{aligned} F(x) * G(x) = a_c b_c F_c(x) * G_c(x) &+ a_c b_d F_c(x) * G_d(x) + \\ &+ a_d b_c F_d(x) * G_c(x) + a_d b_d F_d(x) * G_d(x), \end{aligned}$$

since all convolutions on the right side are defined. By this relation, we also find that $F(x) * G(x)$ is a d. f. and that $F(x) * G(x) = G(x) * F(x)$, i. e. the convolution is a commutative operation in the set D. It is easily seen that a convolution is continuous if it contains one continuous „factor". Thus the discontinuity points of $F(x) * G(x)$ are the discontinuity points of $F_d(x) * G_d(x)$, and these points belong to the set of all points x, which can be given in the form $x = s_\nu + t_\lambda$ ($\nu = 1, 2, \ldots;\ \lambda = 1, 2, \ldots$).

We shall show that the convolution is an associative operation in D. Then we first show that it is an associative operation for d. f.'s having continuous derivatives.

Let $F_1(x)$, $F_2(x)$ and $F_3(x)$ be such d. f.'s. Then we get, according to well-known properties of Riemann integrals,

$$[F_1(x) * F_2(x)] * F_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_3'(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x - t - u)\, F_2'(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x - v)\, dv \int_{-\infty}^{\infty} F_2'(v - u)\, F_3'(u)\, du = F_1(x) * [F_2(x) * F_3(x)].$$

Thus, if $F_1(x)$, $F_2(x)$ and $F_3(x)$ are any d. f.'s, the relations above hold for their Weierstrass transforms $F_1(\sigma_1, x)$, $F_2(\sigma_2, x)$ and $F_3(\sigma_3, x)$ and then, changing the order of a factor $\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$, $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 + \sigma^2$, we get

$$F_1(\sigma_1, x) * [F_2(\sigma_2, x) * F_3(\sigma_3, x)] = [F_1(\sigma_3, x) * F_2(\sigma_2, x)] * F_3(\sigma_1, x).$$

Passing to the limits $\sigma_2 \to +0$, $\sigma_3 \to +0$, $\sigma_1 \to +0$, we obtain, by Lemma 5. 1 and the definition (7. 1), using also the fact that the convolution is commutative

$$F_1(x) * [F_2(x) * F_3(x)] = [F_1(x) * F_2(x)] * F_3(x).$$

Since the convolution is an associative and commutative operation in D, this set is a commutative semi-group in respect to the convolution as a „multiplicative" operation. $\varepsilon(x)$ is unit element of this semi-group and the substitution

$$F(x) \to \overline{F(x)} = 1 - F(-x)$$

defines an isomorphism of the order 2 of the semi-group.

We may now define convolutions for any functions $f(x)$ and $g(x)$ belonging to $R(D)$ by

$$f(x) * g(x) = \lim_{\sigma \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, x - t)\, dg(t).$$

Since every function belonging to $R(D)$ has a representation of the form (3. 1), this convolution exists and is a commutative and associative operation in $R(D)$. It may be observed that the linear set $R(D)$ is made to a ring when the convolution is introduced as „multiplicative" operation and this ring is an algebra over the real numberfield.

Remark. The Weierstrass transform of a d. f. $F(x)$ could also have been defined by

$$F(\sigma, x) = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, \Phi'\left(\frac{x - t}{\sigma}\right) dt$$

and we can define the Weierstrass transform of any function $f(x)$ belonging to $R(D)$ by this integral. Further a generalized Stieltjes integral of any functions $f(x)$ and $g(x)$ belonging to $R(D)$ may be defined by

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \lim_{\sigma \to +0} \int_a^b f(t)\, g'(\sigma, t)\, dt$$

for any finite or infinite interval. By the theory given above, it is easily seen that this limit exists and that the Stieltjes integral defined in this way coincides with the Stieltjes integral defined in section 4, when this integral has a meaning. We can use the definition above also if $g(x) \in R(D)$ and $f(x)$ is any continuous function in (a, b).

8. The Weierstrass norm.

A norm of a function $f(x)$ may be defined by

$$\| f \| = \sup_x | f(x) |.$$

If $f \in R(D)$, it has a Weierstrass transform $f(\sigma, x)$, defined for all $\sigma > 0$. Then we introduce the norm

$$N_\sigma[f] = \| f(\sigma, x) \|,$$

which shall be called the Weierstrass norm or the W-norm of f. When we consider relations in this norm, we shall require that these relations hold for all $\sigma > 0$.

$N_\sigma[f]$ (as well as $\| f \|$), has the following properties, which characterize a norm of a linear space:

1° $N_\sigma[f] \geqq 0$, $N_\sigma[f] = 0$ if and only if $f(x) \equiv 0$,

2° $N_\sigma[f+g] \leqq N_\sigma[f] + N_\sigma[g]$,

3° $N_\sigma[af] = |a| N_\sigma[f]$ for any real number a.

We shall prove the second statement 1° only, since the other statements are evident. By (6. 4), which holds for $f \in R(D)$, we get, if $N_\sigma[f] = 0$,

$$0 = \lim_{\sigma \to 0} N_\sigma[f] \geqq \lim_{\sigma \to +0} |f(\sigma, x)| = |f(x)|,$$

i. e. $N_\sigma[f] = 0$ implies $f(x) \equiv 0$. Clearly the converse is true. Since

$$N_\sigma[f(x)] = \sup_x \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x-t}{\sigma}\right) df(t) \right|,$$

we have, for $a > 0$,

4° $N_\sigma[f(ax)] = N_{a\sigma}[f(x)]$.

For later purposes we further give the inequalities

5° $N_\sigma[f * F] \leqq N_\sigma[f]$ for $f \in R(D)$, $F \in D$,

6° $N_{\sigma_0}[f] \leqq N_\sigma[f]$ for $f \in R(D)$, $0 < \sigma \leqq \sigma_0$.

In fact we have

$$N_\sigma[f * F] = \left\| f(x) * F(x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right\| \leqq \left\| f(x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right\| = N_\sigma[f],$$

what proves 5°. Inequality 6° is a consequence of 5° since

$$\Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma'}\right), \quad \sigma_0^2 = \sigma^2 + (\sigma')^2.$$

From now on we shall consider non-singular q. d. f.'s only. These form the class Q_0 and have the fundamental property

$$\int_{-\infty}^{\infty} df(t) = 0.$$

Hence we have

$$\int_{|t| \leqq \eta} df(t) = -\int_{|t| \geqq \eta} df(t) \tag{8. 1}$$

for any $\eta > 0$. This relation shall frequently be used.

When we consider integrals on intervals containing a closed interval $(-\eta, \eta)$ we call that part of the integral which belongs to $(-\eta, \eta)$ the truncated part on $(-\eta, \eta)$ and the rest of the integral the tailparts.

Using (8. 1) we get

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(-x-t) - \Phi(x-t)]\, df(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [2\Phi(x) - 1 + \Phi(-x-t) - \Phi(x-t)]\, df(t),$$

or, introducing the function

$$k(x,t) = 2\Phi(x) - 1 + \Phi(-x-t) - \Phi(x-t) = 2\Phi(x) - \Phi(x-t) - \Phi(x+t), \tag{8. 2}$$

we obtain

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(-x-t) - \Phi(x-t)]\, df(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x,t)\, df(t). \tag{8. 3}$$

In order to study the connection between $f \in Q_0$ and its W-norm we shall use the relation (8. 3).

To begin with we study $k(x, t)$. As function of t it is even and $k(x, 0) = 0$, $k(x, \infty) = 2\Phi(x) - 1$. Further we have

$$k_t'(x, t) = \Phi'(x - t) - \Phi'(x + t),$$

and here the right side is non-negative for $x \geqq 0$, $t \geqq 0$ (the unimodal property of $\Phi(x)$). Hence for $x \geqq 0$, $k(x, t)$ increases from 0 to $2\Phi(x) - 1$ as t increases from 0 to ∞. We have

$$k(x, t) = -t^2 \Phi''(x - \Theta t), \quad -1 < \Theta < 1,$$

and $\Phi''(x)$ is negative and increasing for $x > 1$. Thus we get

$$k(x, t) \geqq t^2 \, | \Phi''(x + |t|) \text{ for } |t| \leqq x - 1. \tag{8. 4}$$

Now we give boundaries of f and its truncated moments by the W-norm.

Lemma 8. 1. *There exist finite absolute constants c_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$; $c_\nu \leqq c_2$ for $\nu > 2$ such that*

1^0 $$\left| \int_{|t| \geqq \sigma} df(t) \right| \leqq c_0 N_\sigma[f],$$

2^0 $$\frac{1}{\sigma^\nu} \left| \int_{|t| \leqq \sigma} t^\nu df(t) \right| \leqq c_\nu N_\sigma[f]$$

for all $f \in Q_0$. Conversely

3^0 $$N_\sigma[f] \leqq c_0' \int_{|t| \geqq \sigma} df(t) + c_1' \frac{1}{\sigma} \left| \int_{|t| \leqq \sigma} t df(t) \right| + c_2' \frac{1}{\sigma^2} \int_{|t| \leqq \sigma} t^2 df(t)$$

with absolute constants c_0', c_1' and c_2'.

Proof. By the norm property 4^0 it is easily seen that it is sufficient to prove the lemma for $\sigma = 1$. By (8. 3) we then get

$$2N_1[f] \geqq \int_{-\infty}^{\infty} k(x\ t)\, df(t). \tag{8. 5}$$

Since $k(x, t) \geqq 0$ for $x \geqq 0$, we obtain from this integral, using (8. 4) and choosing $x = 2$ [7]),

$$2N_1[f] \geqq | \Phi''(3) | \int_{|t| \leqq 1} t^2 df(t),$$

what proves 2^0 of the lemma for $\nu = 2$ with $c_2 = 2 / | \Phi''(3) |$. Then 2^0 obviously also holds for $\nu > 2$ with $c_\nu \leqq c_2$. Observing that $k(2, t) \geqq k(2, 1)$ for $|t| \geqq 1$, from (8. 5) we further get

$$2N_1[f] \geqq k(2, 1) \int_{|t| \geqq 1} df(t),$$

what proves 1^0 with $c_0 = 2/k(2, 1)$. At last, using the definition of $N_1[f]$, we obtain, expanding $\Phi(-t)$ below by Taylor's formula,

$$N_1[f] \geqq \left| \int_{|t| \leqq 1} \Phi(-t)\, df(t) \right| - \int_{|t| \geqq 1} df(t)$$

$$\geqq \Phi'(0) \left| \int_{|t| \leqq 1} t df(t) \right| - \tfrac{3}{2} \int_{|t| \geqq 1} df(t) - \tfrac{1}{2} | \Phi''(1) | \int_{|t| \leqq 1} t^2 df(t).$$

Since we have proved the existence of constants c_0 and c_2, which satisfy 1^0 and 2^0, we find by the last inequality that also 2^0 is satisfied with an absolute constant c_1 for $\nu = 1$.

---

[7]) This is not the best value.

The inequality 3^0 is a corollary of the following lemma:

Lemma 8. 2. *If $f \in Q_0$ and δ is any interval containing the closed interval $(-\sigma, \sigma)$, then any function $v(t)$, having continuous derivatives of the first and second order for all t, satisfies the inequality*

$$\left|\int_\delta v(t)\,df(t)\right| \leqq 2 \sup_{t\in\delta} |v(t)| \int_{|t|\geqq\sigma} df(t) + |v'(0)| \left|\int_{|t|\leqq\sigma} t\,df(t)\right| + \tfrac{1}{2} \sup_{|t|\in\delta} |v''(t)| \int_{|t|\leqq\sigma} t^2\,df(t).$$

In fact we get 3^0 from this lemma if we put $v(t) = \Phi\left(\frac{x-t}{\sigma}\right)$ and choose δ as the interval $(-\infty, \infty)$.

Proof of Lemma 8. 2. We get the inequality if we estimate the tailparts on $|t| \geqq \sigma$ of the integral on the left side directly and the truncated part on $|t| \leqq \sigma$ after having expanded $v(t)$ by Taylor's formula.

Theorem 8. 1. *There exists an absolute constant c such that*

$$N_\sigma[f * g] \leqq c N_\sigma[f]\, N_\sigma[g]$$

for all $\sigma > 0$ and all f and g belonging to Q_0.

Remark. If f only belongs to $R(D)$ but g still belongs to Q_0, we still have

$$N_\sigma[f * g] \leqq c N_{\sigma/\sqrt{2}}[f]\, N_\sigma[g]$$

with a constant c, which is independent on f, g and σ.

Proof of Theorem 8. 1. Using Lemma 8. 2 and Lemma 8. 1 we get for $f \in R(D)$, $g \in Q_0$

$$N_\sigma[f * g] = \sup_x \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, x-t)\,dg(t)\right|$$
$$\leqq \{2c_0 \sup_x |f(\sigma, x)| + c_1\sigma \sup_x |f'(\sigma, x)| + \tfrac{1}{2} c_2\sigma^2 \sup_x |f''(\sigma, x)|\}\, N_\sigma[g].$$

Using again these two lemmas we obtain, when $f \in Q_0$,

$$|f^{(\nu)}(\sigma, x)| = \frac{1}{\sigma^\nu}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(\nu)}\left(\frac{x-t}{\sigma}\right) df(t)\right|$$
$$\leqq \frac{1}{\sigma^\nu}\left\{2c_0 \sup_x |\Phi^{(\nu)}(x)| + c_1 \sup_x |\Phi^{(\nu+1)}(x)| + \frac{1}{2} c_2 \sup_x |\Phi^{(\nu+2)}(x)|\right\} N_\sigma[f].$$

Combining the last two inequalities we get Theorem 8. 1.

If only $f \in R(D)$ we use the relation

$$f(\sigma, x) = f(\sigma/\sqrt{2}, x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right),$$

and estimate $f^{(\nu)}(\sigma, x)$ as follows

$$|f^{(\nu)}(\sigma, x)| = (\sigma/\sqrt{2})^{-(\nu+1)} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma/\sqrt{2}, t)\, \Phi^{(\nu+1)}\left(\frac{x-t}{\sigma/\sqrt{2}}\right) dt\right|$$
$$\leqq (\sigma/\sqrt{2})^{-\nu} N_{\sigma/\sqrt{2}}[f] \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi^{(\nu+1)}(t)|\,dt.$$

Then, combining these inequalities for $\nu = 0, 1, 2$ with the first one, we get the statement in the remark on the theorem.

We shall need the W-norm when we want to compare functions or sequences of functions and shall then use the following lemma:

Lemma 8. 3. *Let $f \in Q_0$, $g \in Q_0$. Then there exists a function $\gamma(\varrho)$, depending on ϱ only and tending to 0 as $\varrho \to \infty$, and an absolute constant $e > 0$ such that, for $|x| \geqq e\varrho\sigma$, $\varrho \geqq 1$,*

$$|f(x) - g(x)| \leqq N_\sigma[f-g] + \gamma(\varrho)\,\{N_{\varrho\sigma}[f] + N_{\sigma\varrho}[g]\}$$
$$+ \max\{g(x+2\varrho\sigma) - g(x),\ g(x) - g(x-2\varrho\sigma)\}.$$

Remark. We may choose $e = 3$ and $\gamma(\varrho) = e_1\Phi(-\varrho) + e_2\varrho\Phi'(-\varrho) + e_3\varrho^2\,|\Phi''(-\varrho)|$ with absolute constants e_1, e_2 and e_3.

Corollary. *The inequality of the lemma holds for d. f.'s f and g and then we may choose $\gamma(\varrho) = \Phi(-\varrho)$ for all x*[8]).

Proof. According to the property 4° of the W-norm, it is sufficient to consider the case $\sigma = 1$. We have for $x > \varrho$

$$(8.6)\quad N_1[f-g] \geqq -\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-t)\,d[f(t)-g(t)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} [1-\Phi(x-t)]\,d[f(t)-g(t)]$$
$$\geqq [1-\Phi(-\varrho)]\int_{x+\varrho}^{\infty} df(t) - \int_{x-\varrho}^{\infty} dg(t) - \left|\int_{-\infty}^{x-\varrho} [1-\Phi(x-t)]\,d[f(t)-g(t)]\right|.$$

Consider now $x \geqq 2\varrho \geqq 2$ and estimate the last integral by Lemma 8. 1 and Lemma 8. 2. Observing that $\Phi(x), \Phi'(x)$ and $|\Phi''(x)|$ are decreasing for $x \geqq 1$ and that $(-\infty, x-\varrho)$ contains the closed interval $(-\varrho, \varrho)$, we find that this integral is not numerically larger than

$$\gamma_1(\varrho)\,\{N_\varrho[f] + N_\varrho[g]\}$$

with a function $\gamma_1(\varrho)$ of the special form given in the remark on Lemma 8. 3. By Lemma 8. 1 we further have

$$\int_{x+\varrho}^{\infty} df(t) \leqq c_0 N_\varrho[f].$$

Hence the inequality (8. 6) may be written

$$(8.7)\qquad -f(x+\varrho) + g(x-\varrho) = \int_{x+\varrho}^{\infty} df(t) - \int_{x-\varrho}^{\infty} dg(t)$$
$$\leqq N_1[f-g] + \gamma(\varrho)\,\{N_\varrho[f] + N_\varrho[g]\},$$

where $\gamma(\varrho)$ has the mentioned form. Letting f and g change their places in (8. 7), we obtain

$$(8.8)\quad -g(x+\varrho) + f(x-\varrho) \leqq N_1[f-g] + \gamma(\varrho)\,\{N_\varrho[f] + N_\varrho[g]\}.$$

Changing $x+\varrho$ against x in (8. 7) and $x-\varrho$ against x in (8. 8), we get for $x \geqq 3\varrho$

$$-f(x) + g(x) \leqq N_1[f-g] + \gamma(\varrho)\,\{N_\varrho[f] + N_\varrho[g]\} + g(x) - g(x-2\varrho),$$
$$f(x) - g(x) \leqq N_1[f-g] + \gamma(\varrho)\,\{N_\varrho[f] + N_\varrho[g]\} + g(x+2\varrho) - g(x).$$

These two inequalities contain the inequality of the lemma in the case $x \geqq 3\varrho$ $(\sigma = 1)$. The case $x \leqq -3\varrho$ is transferred to the case $x \geqq 3\varrho$, if we define $\bar{f}(t) = -f(-t)$, $\bar{g}(t) = -g(-t)$ and consider the non-singular normal q. d. f.'s $\bar{f}(t)$ and $\bar{g}(t)$.

---

[8]) A lemma, giving a better estimation, when $g(x)$ has a bounded derivative in $(-\infty, \infty)$ is given in Bergström, On the Central Limit Theorem, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1944, p. 143.

The corollary is obtained if we observe that the last integral on the right side of (8. 6) is not larger than $\Phi(-\varrho)$, if f and g are d. f.'s, and that the W-norm of a d. f. is equal to 1.

In order to study the truncated central moments, we introduce the truncated W-norm

$$N_\sigma^{(\eta)}(f) = \left\| \int\limits_{|t| \leqq \eta} \Phi\left(\frac{x-t}{\sigma}\right) df(t) \right\|$$

and prove

Lemma 8. 4. *Let $f, g \in Q_0$. There exist absolute constants $e_\nu^{(1)}$ and $e_\nu^{(2)}$ such that*

$$\left| \int\limits_{|t| \leqq \eta} t^\nu d[f(t) - g(t)] \right| \leqq e_\nu^{(1)} N_1^{(\eta)}[f-g] + e_\nu^{(2)} \eta^\nu \{N_1[f] + N_1[g]\}$$

for $0 < \eta \leqq 1$, $\nu = 0, 1, 2$. Here we may choose $e_0^{(1)} = 1$, $e_0^{(2)} = 0$.

Remark. The inequality holds for $0 < \eta \leqq \sigma$ if we change $N_1^{(\eta)}$ and N_1 against $N_\sigma^{(\eta)}$ and N_σ respectively and $e_\nu^{(1)}$ against $\sigma^\nu e_\nu^{(1)}$.

Proof. We have for any x

$$\left| \int\limits_{|t| \leqq \eta} \Phi(x-t)\, d[f(t) - g(t)] \right| \leqq N_1^{(\eta)}[f-g].$$

Passing to the limit $x \to \infty$, we get

$$\left| \int\limits_{|t| \leqq \eta} d[f(t) - g(t)] \right| \leqq N_1^{(\eta)}[f-g]. \tag{8. 9}$$

Further using Taylor's formula we obtain for any x

$$\begin{aligned} (8.10)\quad 2N_1^{(\eta)}[f-g] &\geqq \left| \int\limits_{|t| \leqq \eta} [\Phi(x-t) \pm \Phi(-x-t)]\, d[f(t) - g(t)] \right| \\ \geqq \Bigg| \int\limits_{|t| \leqq \eta} \Bigg\{ &[\Phi(x) \pm \Phi(-x)] - [\Phi'(x) \pm \Phi'(-x)]\, t + [\Phi''(x) \pm \Phi''(-x)] \frac{t^2}{2!} \\ &- [\Phi'''(x) \pm \Phi'''(-x)] \frac{t^3}{3!} \Bigg\} d[f(t) - g(t)] \Bigg| \\ &- \frac{2}{4!} \cdot \sup_x |\Phi^{(\mathrm{IV})}(x)|\, \eta^2 \int\limits_{|t| \leqq \eta} t^2 d[f(t) + g(t)]. \end{aligned}$$

According to Lemma 8. 1, the last integral is not larger than $c_2\{N_1[f] + N_1[g]\}$. Now we choose $x = 0$ and the plus sign in all brackets [ ] in (8. 10). Observing that $\Phi''(0) = 0$ and

$$0 \leqq \int\limits_{|t| \leqq \eta} |t^3|\, df(t) \leqq \eta \int\limits_{|t| \leqq \eta} t^2 df(t) \leqq \eta c_2 N_1[f]$$

for any $f \in Q_0$, from (8. 9) and (8. 10) we get the inequality of the lemma for $\nu = 1$. Choosing then $x = 1$, and the minus sign in all brackets [ ] we get the inequality of the lemma in the case $\nu = 2$. (We observe that $\Phi'(x) = \Phi'(-x)$, $\Phi'''(x) = \Phi'''(-x)$.)

The statement of the remark on the lemma is easily obtained, if we observe that $N_1[f(\sigma x)] = N_\sigma[f(x)]$, $N_1^{(\eta)}[f(\sigma x)] = N_\sigma^{(\eta\sigma)}[f(x)]$.

9. On the convergence of sequences of q. d. f.'s and d. f.'s.

Consider sequences $\{f_n(x)\}$ of non-singular normal q. d. f.'s (functions of the class Q_0). We call such a sequence QM-convergent if $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ and $\int\limits_{|x| \leqq \eta} x^\nu df_n(x) \to \alpha_\nu(\eta)$ $(n \to \infty)$ for $\nu = 1, 2, \ldots$, where $f(x)$ is a normal q. d. f., and the functions $\alpha_\nu(\eta)$ are

finite for finite η (weak convergence of $f_n(x)$ to a normal q. d. f., i. e. to a function of the class Q, and weak convergence of the truncated central moments of $f_n(x)$).

Theorem 9. 1. *Let $f_n \in Q_0$ and let $f_n(x) \to f(x) \in Q$ $(n \to \infty)$. Then $\{f_n(x)\}$ is QM-convergent, if $\int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df_n(x) \to \alpha_\nu(\eta_0)$ for the indices $\nu = 1, 2$ and for some $\eta_0 > 0$ such that $\pm \eta_0$ are continuity points of $f(x)$.*

Proof. Applying corollary 2 of lemma 5. 1, we find that the convergence $f_n(x) \to f(x) \in Q$ implies the convergences

$$\int\limits_{\eta_1 \leq |x| \leq \eta_2} x^\nu df_n(x) \to \int\limits_{\eta_1 \leq |x| \leq \eta_2} x^\nu df(x) \qquad (n \to \infty), \tag{9. 1}$$

for any $\nu > 0$ if $\pm \eta_1$ and $\pm \eta_2$ are continuity points of $f(x)$. Hence the weak convergence of the truncated central moments on $|x| \leqq \eta$ follows from their convergence for the special value $\eta = \eta_0$. Further we have

$$\left| \int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df_n(x) \right| \leqq \eta^{\nu-2} \int\limits_{|x| \leq \eta} x^2 df_n(x), \tag{9. 2}$$

and this quantity tends to 0 as $(n \to \infty,\ \eta \to +0)$ [9]) if $\nu > 2$ and if the conditions of the lemma are satisfied. Then all truncated central moments $(\nu = 1, 2, \ldots)$ are weakly convergent, when these conditions are satisfied.

Theorem 9. 2. *Let $f_n(x) \in Q_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ and let $f_n(x) \to f(x) \in Q$ $(n \to \infty)$. Then the convergence*

$$\int\limits_{|x| \leq \eta} x^2 df_n(x) \to \alpha_2 \qquad (n \to \infty,\ \eta \to +0)$$

with a finite number α_2 implies the convergences

$$\int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df_n(x) \to \int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df(x) + \begin{cases} \alpha_2 & \text{if } \nu = 2 \\ 0 & \text{if } \nu > 2 \end{cases} \qquad (n \to \infty)$$

for any η such that $\pm \eta$ are continuity points of $f(x)$. The generalized integral on the right side exists and is finite for finite η. Conversely α_2 exists as a finite number, if $\int\limits_{|x| \leq \eta} x^2 df_n(x)$ convergences weakly and $f_n(x) \to f(x) \in Q$.

Proof. Let the limit α_2 exist as a finite number. Then

$$\limsup_{n \to \infty} \int\limits_{|x| \leq \eta} x^2 df_n(x)$$

must be finite for sufficiently small $\eta > 0$, and hence, according to (9. 1), finite for any $\eta < \infty$. Then, by (9. 1), we get

$$\int\limits_{\eta_1 \leq |x| \leq \eta_2} x^2 df_n(x) \to \int\limits_{|x| \leq \eta_2} x^2 df(x) \qquad (n \to \infty,\ \eta_1 \to +0)$$

if $\pm \eta_2$ are continuity points of $f(x)$. The (generalized) integral on the right side thus exists and is finite. Hence we get

$$\int\limits_{|x| \leq \eta} x^2 df_n(x) \to \int\limits_{|x| \leq \eta} x^2 df(x) + \alpha_2 \qquad (n \to \infty).$$

Using (9. 2), we obtain, in the same way,

$$\int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df_n(x) \to \int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df(x) \qquad (n \to \infty)$$

---

[9]) We use the notation $(n \to \eta \to)$ when we consider repeated limits in the order $n \to$, $\eta \to$, and the notation $\binom{n \to}{\eta \to}$ when we consider the double limit.

for $\nu > 2$. Conversely, the weak convergence of $\int\limits_{|x| \leq \eta} x^2 df_n(x)$ to a limit $\alpha_2(\eta)$, implies the existence of α_2, since $\alpha_2(\eta)$ must be non-negative and non-decreasing for $\eta > 0$.

We shall call two QM-convergent sequences $\{f_n(x)\}$ and $\{g_n(x)\}$ *QM-equivalent*, if $f_n(x) - g_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ and $\int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu d[f_n(x) - g_n(x)] \to 0$ for $\nu = 1, 2, \ldots$.

According to theorem 9. 1, it is sufficient to consider $\nu = 1, 2$ only.

Theorem 9. 3. *Let $f_n(x) \in Q_0$, $g_n(x) \in Q_0$ and let $\{g_n(x)\}$ be QM-convergent. Then $\{f_n(x)\}$ and $\{g_n(x)\}$ are QM-equivalent if, and only if,*

$$N_\sigma\{f_n - g_m\} \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}.$$

Remark. The last relation always holds if

$$N_\sigma[f_n - g_n] \to 0 \ (n \to \infty).$$

Proof. Let $\{g_n(x)\}$ be QM-convergent and $\{f_n(x)\}$ QM-equivalent to $\{g_n(x)\}$. Then we have

$$g_n(x) \to g(x),\ f_n(x) \to g(x) \qquad (n \to \infty) \tag{9. 3}$$

with a normal q. d. f. $g(x)$, and

$$\int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu dg_n(x) \to \alpha_\nu(\eta),\ \int\limits_{|x| \leq \eta} x^\nu df_n(x) \to \alpha_\nu(\eta) \qquad (n \to \infty) \tag{9. 4}$$

$(\nu = 1, 2, \ldots)$ with functions $\alpha_\nu(\eta)$, which are finite for finite η. We shall prove that

$$N_\sigma[f_n - g_m] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}. \tag{9. 5}$$

Applying corollary 2 of lemma 5. 1 and the relations (9. 3) we get

$$\int\limits_{|t| \geq \eta} \Phi\left(\frac{x-t}{\sigma}\right) d[f_n(t) - g_m(t)] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix} \tag{9. 6}$$

uniformly in respect to x for every $\eta > 0$ such that $\pm\eta$ are continuity points of $g(x)$. Further, expanding $\Phi\left(\frac{x-t}{\sigma}\right)$ by Taylor's formula, we obtain

$$\begin{aligned} &\int\limits_{|t| \leq \eta} \Phi\left(\frac{x-t}{\sigma}\right) d[f_n(t) - g_m(t)] \\ &= \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \int\limits_{|t| \leq \eta} d[f_n(t) - g_m(t)] - \frac{1}{\sigma}\Phi''\left(\frac{x}{\sigma}\right) \int\limits_{|t| \leq \eta} t d[f_n(t) - g_m(t)] \\ &+ \frac{1}{2\sigma^2}\Phi''\left(\frac{x}{\sigma}\right) \int\limits_{|t| \leq \eta} t^2 d[f_n(t) - g_m(t)] - \frac{1}{6\sigma^3} \int\limits_{|t| \leq \eta} \Phi'''\left(\frac{x - \Theta t}{\sigma}\right) t^3 d[f_n(t) - g_m(t)] \end{aligned} \tag{9. 7}$$

$(0 < \Theta < 1)$. Let $\pm\eta$ be continuity points of $g(x)$. The first integral on the right side of (9. 7) tends to 0 as $\begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}$, according to (9. 3). The second and the third integrals tend to 0 as $\begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}$, according to (9. 4). The last integral is numerically smaller than

$$\sup_x |\Phi'''(x)|\, \eta \int\limits_{|t| \leq \eta} t^2 d[f_n(t) + g_m(t)]$$

and, according to (9. 4), as $\begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}$ this quantity tends to a value, which is arbitrarily small for sufficiently small η. Since also (9. 6) holds, (9. 5) must then be satisfied.

Let (9. 5) be satisfied and let $\{g_n(x)\}$ be QM-convergent. Then we find by 3° of lemma 8. 1

$$\limsup_{n\to\infty} N_\sigma[g_n] < \infty$$

and by (9. 5)

$$\limsup_{n\to\infty} N_\sigma[f_n] \leqq \limsup_{n\to\infty} \{N_\sigma[g_n] + N_\sigma[f_n - g_n]\} = \limsup_{n\to\infty} N_\sigma[g_n] < \infty.$$

Now we apply lemma 8. 3 to the difference $f_n - g_n$ and pass to the limit $(n \to \infty,\ \varrho \to \infty)$ in the inequality of the lemma with fixed $\varrho\sigma = \varepsilon$, choosing ε such that x and $x \pm \varepsilon$ are continuity points of $g(x)$. Then we obtain

$$\limsup_{n\to\infty} |f_n(x) - g_n(x)| \leqq g(x + 2\varepsilon) - g(x - 2\varepsilon). \tag{9. 8}$$

Here we may choose ε arbitrarily small. Hence, observing that x is a continuity point of $g(x)$, we get $f_n(x) - g_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, and, since $g_n(x)$ is QM-convergent, we also obtain the relations (9. 3). These relations imply (9. 6). By (9. 5) and (9. 6) we get for the truncated norm

$$N_1^{(\eta)}[f_n - g_n] \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

for every $\eta > 0$ such that $\pm\eta$ are continuity points of $g(x)$.

Applying now lemma 8. 4 to the difference $f_n - g_n$ and passing to the limit $(n \to \infty,$ $\eta \to +0)$ in the inequality of the lemma, we get

$$\int_{|t| \leqq \eta} t^\nu d[f_n(t) - g_n(t)] \to 0 \qquad (n \to \infty,\ \eta \to +0) \tag{9. 9}$$

for $\nu = 1, 2$. Combining this relation with (9. 1), which by (9. 3) is satisfied for $f_n(x)$ and $g_n(x)$ with $f(x) = g(x)$, we get,

$$\int_{|t| \leqq \eta} t^\nu d[f_n(t) - g_n(t)] \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

if $\pm\eta$ are continuity points of $g(x)$. Observing that $\{g_n(x)\}$ is QM-convergent, we then find that (9. 4) holds for $\nu = 1, 2$. Thus the theorem is proved.

A sequence $\{f_n(x)\}$ of functions, having Weierstrass transforms, shall be called *Cauchy convergent* in the W-norm if

$$N_\sigma[f_n - f_m] \to 0 \qquad \begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}.$$

Theorem 9. 4. *Let $f_n(x) \in Q_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. In order that $\{f_n(x)\}$ be QM-convergent it is necessary and sufficient that $\{f_n(x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm.*

Proof. I. The necessity of the conditions is obtained from theorem 9. 3 if we put $g_m(x) = f_m(x)$.

II. Let $\{f_n(x)\}$ be Cauchy convergent in the W-norm. Then, if A is any positive number, there exists a positive integer m_0 such that

$$N_\sigma\,[f_n - f_{m_0}] < A \text{ for } n > m_0.$$

Hence

$$\limsup_{n\to\infty} N_\sigma[f_n] \leqq \limsup_{n\to\infty} \{N_\sigma[f_{m_0}] + N_\sigma[f_n - f_{m_0}]\} = N_\sigma[f_{m_0}] + A,$$

i. e. $N_\sigma[f_n]$ is uniformly bounded in respect to n for any given $\sigma > 0$. Applying lemma 8. 1, we then find that $\{f_n(x)\}$ and its truncated central moments of the first and second order on $|x| \leqq \eta$ are uniformly bounded in respect to n for any $x \neq 0$ and any $\eta < \infty$.

Let $r_1, r_2, \ldots, r_s \ldots$ be some arrangement of the enumerable set of all rational numbers, which are different from 0. Proceeding in the classical way, from the sequence $1, 2, \ldots$, we select a sub-sequence N_1, such that $\{f_n(x)\}$ converges in the special point r_1, when n passes to ∞ through N_1, from N_1 we select a sub-sequence N_2, such that $\{f_n(x)\}$ converges in the point r_2 and so on. Forming then the diagonal sequence $\bar{N}$, whose first element is the first element of N_1, whose second element is the second element of N_2, and so on, we get a sequence $\bar{N}$ such that $\{f_n(x)\}$ converges in every point r_s as $n \to \infty$ through $\bar{N}$. We put

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \bar{N}}} f_n(r_s) = v(r_s).$$

Thus the function $v(r_s)$ is defined for all rational numbers $\neq 0$. Now we define $v(x)$ for all $x \neq 0$ by

$$v(x) = \sup_{\substack{r_s \leq x \\ r_s > 0, \text{ if } x > 0}} v(r_s).$$

At last we put $f(x) = \frac{1}{2}\{v(x+0) + v(x-0)\}$ for all x.

Let now $x \neq 0$ be any continuity point of $v(x)$. Then we choose rational numbers ξ_1 and ξ_2 arbitrarily close to x (thus of the same sign as x). For $\xi_1 < x < \xi_2$, we have

$$f_n(\xi_1) \leqq f_n(x) \leqq f_n(\xi_2), \quad v(\xi_1) \leqq v(x) \leqq v(\xi_2).$$

Since $f_n(\xi_1) \to v(\xi_1)$, $f_n(\xi_2) \to v(\xi_2)$ $(n \to \infty,\ n \in \bar{N})$ and $v(\xi_1)$ and $v(\xi_2)$ are arbitrarily close to $v(x)$, we get

$$f_n(x) \to v(x) \qquad (n \to \infty,\ n \in \bar{N}).$$

Hence $f_n(x) \to v(x)$ and $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty,\ n \in \bar{N})$.

Now we prove that $f(x) \in Q$. Obviously, it is non-decreasing for $x \neq 0$, and, according to its definition, it satisfies the relation

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

for all x. It remains to prove that $|f(x)| \to 0$ $(|x| \to \infty)$.

Applying lemma 8. 3 to the difference $f_n(x) - f_m(x)$, and, for fixed $\sigma > 0$, passing to the limit $(n \to \infty,\ \varrho \to \infty)$ in such a way that $x = 4\varrho\sigma$ and x and $x \pm 2\varrho\sigma$ are continuity points of $f(x)$, we obtain

$$\limsup_{\varrho \to \infty} \left\{ \limsup_{n \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \right\} \leqq \limsup_{n \to \infty} N_\sigma[f_n(x) - f_m(x)]$$
$$+ \limsup_{\varrho \to \infty} \{f_m(x + 2\varrho\sigma) - f_m(x - 2\varrho\sigma)\}.$$

The left side is equal to $f(+\infty)$ since $f_m(+\infty) = 0$ and since $f(+\infty)$ obviously exists, $f(x)$ being non-decreasing. By the first argument we also find that the second limit on the right side is 0. Passing now to the limit $m \to \infty$ and observing that $N_\sigma[f_n - f_m] \to 0 \begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}$, we get $f(+\infty) = 0$. In the same way we prove that $f(-\infty) = 0$.

Let η_0 be a positive number such that $\pm\eta_0$ are continuity points of $f(x)$. Since the truncated central moments of $f_n(x)$ on $|x| \leqq \eta_0$ are uniformly bounded in respect to n, we can select a sub-sequence $\bar{\bar{N}} \subset \bar{N}$ such that $\int\limits_{|x| \leqq \eta} x\,df_n(x)$ and $\int\limits_{|x| \leqq \eta} x^2\,df_n(x)$ converges to finite numbers for the special value $\eta = \eta_0$ when n passes to ∞ through $\bar{\bar{N}}$.

Then we find by theorem 9. 1 that $\{f_n(x)\}$ $(n \in \bar{\bar{N}})$ is QM-convergent. According to theorem 9. 3, any sub-sequence of $\{f_n(x)\}$ is QM-equivalent to $\{f_n(x)\}$ $(n \in \bar{\bar{N}})$, since $N_\sigma[f_n - f_m] \to 0$ $\begin{pmatrix} n \to \infty \\ m \to \infty \end{pmatrix}$. Thus the theorem is proved.

We shall deduce two theorems for d. f.'s.

Theorem 9. 5. *If $\{F_n(x)\}$ and $\{G_n(x)\}$ are sequences of d. f.'s and $G_n(x) \to G(x)$ $(n \to \infty)$, with a d. f. $G(x)$, then we have $F_n(x) \to G(x)$ $(n \to \infty)$ if, and only if, $N_\sigma[F_n - G_n] \to 0$ $(n \to \infty)$.*

Theorem 9. 6. *If $\{F_n(x)\}$ is a sequence of d. f.'s, then $F_n(x) \to F(x)$ $(n \to \infty)$ with a d. f. $F(x)$ if, and only if, $\{F_n(x)\}$ is Cauchy convergent in the W-norm.*

Proof. Observing that $\{F_n(x) - \varepsilon(x)\}$ is a sequence of non-singular normal q. d. f.'s, we get the theorems 9. 5 and 9. 6 as corollaries of the theorems 9. 3 and 9. 4, since the conditions for the truncated moments are trivial when $F_n(x) \to F(x) \in D$.

At last we prove

Theorem 9. 7. *If $F_n(x) \to F(x)$, $G_n(x) \to G(x)$ $(n \to \infty)$ with d. f.'s $F(x)$ and $G(x)$, then*

$$F_n(x) * G_n(x) \to F(x) * G(x) \qquad (n \to \infty).$$

Proof. Using the identity

$$F_n * G_n - F * G = F_n * [G_n - G] + G * [F_n - F]$$

and the properties of the W-norm, we get

$$N_\sigma[F_n * G_n - F * G] \leqq N_\sigma[G_n - G] + N_\sigma[F_n - F].$$

Then applying Theorem 9. 5, we obtain the theorem.

We end this section by the following remark. The QM-convergence can also be considered for double sequences and then at repeated limits or double limits and we may consider uniform convergence in respect to one parameter when the other tends to ∞. It is easily seen that the Theorems 9. 3., 9. 5 and 9. 7 hold in all these general cases.

Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen.

Von *C. Meyer* in Hamburg.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist durch eine Bemerkung von Hecke [8] veranlaßt worden, der in einer wichtigen Abhandlung über die Berechnung der Klassenzahl gewisser total-imaginärer biquadratischer Zahlkörper die Aufgabe stellte, einige einfache Invarianz- und Kovarianzeigenschaften der in der Klassenzahlformel jeweils auftretenden, aus funktionentheoretischer Quelle stammenden Strahlklasseninvarianten elementar-arithmetischer Natur unmittelbar an diesen Ausdrücken selbst, ohne Zuhilfenahme der Funktionentheorie, nachzuweisen. Diese Aufgabe ist auch in der Monographie des Verfassers [15] über Klassenzahlen ungelöst geblieben, da ihre Erledigung zu weit aus dem dortigen Rahmen herausgeführt hätte. Die genannten Klasseninvarianten sind nun, nach der von Rademacher [18] vorgeschlagenen Bezeichnungsweise, im wesentlichen Dedekindsche Summen und gewisse bislang nicht betrachtete Verallgemeinerungen solcher Summen, und die fraglichen Invarianz- und Kovarianzeigenschaften spiegeln sich wider in merkwürdigen arithmetischen Eigenschaften der Dedekindschen Summenausdrücke. Dieser Zusammenhang scheint Hecke entgangen zu sein, obwohl Hecke die Untersuchungen von Dedekind [2], die dieser gelegentlich der Ausführung einiger Notizen aus den Riemannschen Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen angestellt hat, erwähnt, ohne jedoch selbst weitere arithmetische Folgerungen daraus zu ziehen.

Bei dieser Einordnung der Heckeschen Fragestellung in die Theorie der Dedekindschen Summen erscheint es, auch in Hinblick auf einige zu gebende weitere funktionentheoretische und arithmetische Anwendungen, zweckmäßig, eine systematische Theorie der Dedekindschen Summen und ihrer Verallgemeinerungen den Anwendungen voranzustellen. Dabei ergeben sich naturgemäß manche Berührungspunkte mit den von Rademacher [18], [19] und Rademacher-Whiteman [21] gegebenen Darstellungen dieser Theorie.

Im ersten Abschnitt werden die speziellen Dedekindschen Summen nebst Anwendungen behandelt, die erstmalig in der Dedekindschen Transformationsformel für die Funktion $\log \sqrt[24]{\Delta(\tau)} = \log \eta(\tau)$ bei Modulsubstitutionen als Summandensysteme auftreten. Unabhängig von ihrer analytischen Bedeutung werden sodann die Dedekindschen Summen rein-arithmetisch untersucht. Anknüpfend an eine von Maier [13] gestellte Aufgabe erhält man unter Benutzung einer auf Eisenstein [3] zurückgehenden trigonometrischen Formel für die mit dem kleinsten nicht-negativen Rest $R(x) \bmod^+ 1$ gebildete Funktion $P_1(x) = R(x) - \frac{1}{2}$ aus gemeinsamer Quelle dann unmittelbar die verschiedenen

Zusatz bei der Korrektur: Erst beim Druckfertigmachen dieser Arbeit, die im Juli 1955 der math.-nat. Fakultät der Universität Hamburg als Hab.-Schrift eingereicht war, erhielt ich Kenntnis von der Abhandlung „Zur Theorie der Dedekindschen Summen" von H. Rademacher (Math. Zeitschr. **63** (1955/56), 445—463), die mit der vorliegenden Arbeit teilweise enge Berührungspunkte aufweist, jedoch hierauf ohne Einfluß geblieben ist.

Darstellungsarten der Dedekindschen Summen, nämlich einerseits die von Dedekind [2] stammende, in $P_1(x)$ bilineare Summenformel, andererseits die gelegentlich von Rademacher [19] und Rédei [22] verwendete Cotangentenformel. Diese letztere Formel ist dann auch zum Beweis der Reziprozitätsformel für Dedekindsche Summen, des zentralen Theorems der ganzen Theorie, sowie zur Herleitung der außerordentlich wichtigen, in der Funktion $P_1(x)$ linearen Summenformel für Dedekindsche Summen herangezogen worden. Auf die ursprüngliche bilineare Darstellung gründet sich dann, ähnlich wie bei Rademacher [18], der Beweis für die Kompositionsregel der einer unimodularen Matrix M zugeordneten Rademacherschen Matrixfunktion $\Phi(M)$, die wesentlich mittels einer Dedekindschen Summe gebildet ist. Im Anschluß an diese allgemeinen Darlegungen folgen dann einige Anwendungen auf Funktionentheorie und Arithmetik. Hier bietet sich zunächst die altberühmte Aufgabe der expliziten Bestimmung derjenigen 24-sten Einheitswurzeln dar, welche die Funktion $\sqrt[24]{\Delta(\tau)} = \eta(\tau)$ bei linearer Transformation annimmt. Die Rechnung gestaltet sich unter Zugrundelegung der Linearformel für Dedekindsche Summen außerordentlich einfach und, wie es scheint, durchsichtiger als bei Rademacher [20] geschehen. Als Anwendung aus der rationalen Zahlentheorie wird sodann ein Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes gegeben, der an die auf Zolotareff [25] zurückgehende Deutung des Legendre-Jacobischen Symbols als Permutationscharakter anknüpft. Der hierbei aufgedeckte Zusammenhang zwischen Inversionsanzahlen in gewissen Permutationen und Dedekindschen Summen scheint deswegen bemerkenswert, weil damit die Dedekindschen Summen endlich eine inhaltliche anzahlmäßige Bedeutung erhalten haben, und eine von Salié stammende, unmittelbar zum Reziprozitätsgesetz hinführende merkwürdige Reziprozität zwischen solchen Inversionsanzahlen erweist sich als äquivalent mit der Reziprozitätsformel für Dedekindsche Summen. Den Schluß des ersten Abschnitts bildet der Nachweis der Invarianz- und Kovarianzeigenschaften der eingangs erwähnten elementar-arithmetischen Klasseninvarianten. Genauer handelt es sich dabei um Ringklasseninvarianten zu reell-quadratischen Zahlkörpern, wie sie in den Klassenzahlformeln des Verfassers [15] teilweise auftreten.

Im zweiten Abschnitt werden die allgemeinen Dedekindschen Summen nebst Anwendungen behandelt, die in der Transformationsformel für den Logarithmus der normierten Kleinschen f-ten σ-Teilwerte $\log \sigma_{gh}$ bei Modulsubstitutionen aus der Hauptkongruenzgruppe f-ter Stufe als Summandensysteme auftreten. Diese allgemeinen Summen lassen sich auf die speziellen Dedekindschen Summen sowie gewisse einfachere, von Eisenstein [3], Stern [23] und anderen betrachtete Summen zurückführen. Auch hier läßt sich wieder mittels solcher allgemeinen Dedekindschen Summen jeweils eine Matrixfunktion $\Phi_{gh}(M)$ für unimodulare Matrizen M aus der Hauptkongruenzgruppe f-ter Stufe definieren. Der Beweis der Kompositionsregel für $\Phi_{gh}(M)$ ist jedoch wesentlich schwieriger als im speziellen Fall, da hier im Gegensatz zur vollen Modulgruppe Erzeugende der Hauptkongruenzgruppe explizit nicht zur Verfügung stehen. Im Anschluß an diese allgemeinen Darlegungen folgt dann jeweils eine Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik. Das Multiplikatorsystem der Kleinschen σ-Teilwerte bei Modulsubstitutionen aus der Hauptkongruenzgruppe f-ter Stufe wird explizit bestimmt, und zum Schluß wird der Nachweis der Invarianz- und Kovarianzeigenschaften der eingangs erwähnten elementar-arithmetischen Strahlklasseninvarianten, wie sie in den Klassenzahlformeln von Hecke und dem Verfasser auftreten, erbracht.

I. Spezielle Dedekindsche Summen.

§ 1. Die Transformationsformel für die Funktion $\log \sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}$ bei Modulsubstitutionen.

1. Die zum Gitter $\mathfrak{w} = \binom{\omega_1}{\omega_2}$ gehörige Weierstraßsche Diskriminante

$$\Delta(\mathfrak{w}) = g_2^3(\mathfrak{w}) - 27 g_3^2(\mathfrak{w}) \tag{1.1}$$

verhält sich als Funktion des Gitters im Endlichen regulär und ist dort von Null verschieden. Sie ist eine Modulform erster Stufe und hat als solche die Dimension -12. Es sei die Normierung der Gitterbasis $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ so getroffen, daß der Basisquotient $\tau = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ einen Imaginärteil $\mathfrak{J}(\tau) > 0$ hat; dies ist gleichbedeutend damit, daß $\operatorname{sgn} \dfrac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i} = +1$ ausfällt, wenn $\delta(\mathfrak{w}) = \delta\binom{\omega_1}{\omega_2}$ die bis auf das Vorzeichen durch $\mathfrak{w}$ eindeutig bestimmte Determinante des Gitters bezeichnet. Im Unendlichen besitzt dann $\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}$ in der Ortsuniformisierenden

$$q = e^{2\pi i\tau} \text{ mit } |q| < 1$$

die Produktentwicklung

$$\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} q^{12} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^{24}. \tag{1.2}$$

Demnach ist der im Unendlichen normierte Zweig ihrer 24-sten Wurzel

$$\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{24}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) \tag{1.3}$$

eine zweideutige, im Endlichen reguläre und von Null verschiedene Modulform der Dimension $-\frac{1}{2}$. Sie hängt vermöge der q-Entwicklung (1.3) mit der inhomogenen Dedekindschen Modulfunktion

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) \tag{1.4}$$

durch die Beziehung

$$\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau) \tag{1.5}$$

zusammen.

Es sei nun $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $|M| = ad - bc = +1$ eine beliebige ganzzahlige unimodulare Matrix und $M(\tau) = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ die zugeordnete linear-gebrochene, inhomogene Modulsubstitution in der Variablen τ. Dann läßt sich die Differenz

$$\log \sqrt[24]{\Delta\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)} - \log \sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}} = \log \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}}$$

als in der oberen τ-Halbebene eindeutige, reguläre Funktion der einen komplexen Variablen τ erklären durch

$$(1.6)\qquad \log\frac{\sqrt[24]{\Delta\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}} = -\frac{1}{2}\log(c\tau+d)+\frac{\pi i}{12}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}-\tau\right)$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{2\pi i m n\tau}\Big|_{\tau}^{M(\tau)}$$
$$=-\frac{1}{2}\log(c\tau+d)+\frac{\pi i}{12}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}-\tau\right)$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{2\pi i n\tau}}{1-e^{2\pi i n\tau}}\Big|_{\tau}^{M(\tau)}.$$

Hierin bedeutet $\log(c\tau+d)$ den Hauptwert des Logarithmus mit

$$(1.7)\qquad \begin{cases} -\pi < \Im\big(\log(c\tau+d)\big) < \pi & \text{für } c \neq 0,\\ \log(c\tau+d) = \begin{cases}\log 1 = 0\\ \log(-1)=\pi i\end{cases} & \text{für } c=0\\ & \text{und dann } a=d=\pm 1.\end{cases}$$

Ferner ist allgemein abkürzend $F(M(\tau))-F(\tau)=F(\tau)\big|_{\tau}^{M(\tau)}$ gesetzt. Dann besteht im nicht-trivialen Fall $c \neq 0$ die folgende, gleich für beliebige $\binom{\omega_1}{\omega_2}$ mit $\Im(\tau)\neq 0$ formulierte *Transformationsformel* (Dedekind [2], Tannery-Molk [24], Mellin [14], Rademacher [18], Meyer [15]):

$$(1.8)\qquad \log\frac{\sqrt[24]{\Delta\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}} = \operatorname{sgn}\frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i}\,\pi i\left(\frac{a+d}{12c}-\frac{1}{4}\operatorname{sgn}c-\operatorname{sgn}c\cdot s(a,c)\right).$$

Hierin bezeichnet

$$(1.9)\qquad s(a,c)=\sum_{\mu \bmod c}{}' P_1\left(\frac{a\mu}{c}\right)P_1\left(\frac{\mu}{c}\right)$$

die dem ganzzahligen, teilerfremden Argumentpaar a, c zugeordnete (*spezielle*) *Dedekindsche Summe.* Dieser Summenausdruck ist mittels der stückweise linearen unstetigen periodischen Funktion

$$(1.10)\qquad P_1(x)=x-[x]-\tfrac{1}{2}=R(x)-\tfrac{1}{2}$$

gebildet, die für $0<x<1$ mit dem ersten Bernoullischen Polynom $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$ übereinstimmt. Die Summation ist dabei über ein beliebiges volles System von Resten $\mu \not\equiv 0 \bmod c$ zu erstrecken; das Auslassen von $\mu \equiv 0 \bmod c$ sei durch den Strich am Summenzeichen angedeutet.

Im trivialen Fall $c=0$ dagegen ergibt sich wegen $a=d=\pm 1$, also mit

$$M_0^{\pm}=\begin{pmatrix}\pm 1 & b\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix},$$

aus der Definitionsgleichung (1.6) jeweils die *Transformationsformel*

$$(1.11)\qquad \log\frac{\sqrt[24]{\Delta\left(M_0^{\pm}\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}} = \begin{cases}\operatorname{sgn}\dfrac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i}\,\dfrac{2\pi i b}{24} & \text{für } M_0^{+},\\[2ex] -\operatorname{sgn}\dfrac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i}\left(\dfrac{\pi i}{2}+\dfrac{2\pi i b}{24}\right) & \text{für } M_0^{-}.\end{cases}$$

2. Aus der Dedekindschen Transformationsformel (1.8) lassen sich tiefliegende arithmetische Folgerungen ziehen. Zunächst ist zu bemerken, daß die rechte Seite jener

Formel von dem komplexen Variablenpaar $\binom{\omega_1}{\omega_2}$, bis auf das durch $\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}$ bestimmte Vorzeichen, ganz unabhängig ist. Ist dann $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die eine Erzeugende der Modulgruppe, so gilt nach dieser Bemerkung also für die linke Seite auch

$$\log \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(M\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}} = \log \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}}.$$

Nun ist aber, wie leicht zu sehen, bei positiver Orientierung der Gitterbasis, für $cd \neq 0$

$$\log \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(M\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}} = \log \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(MT\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}} - \log \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}} - \pi i \frac{(1+\operatorname{sgn} c)(1-\operatorname{sgn} d)}{4},$$

und hierin ist nach (1. 8) unmittelbar

$$\log \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}} = -\frac{\pi i}{4}.$$

Somit folgt wegen $MT = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$ durch Vergleich der rechten Seiten in (1. 8) jeweils:

$$\begin{aligned} &\frac{a+d}{12c} - \frac{1}{4}\operatorname{sgn} c - \operatorname{sgn} c \cdot s(a, c) \\ &\quad = \frac{b-c}{12d} - \frac{1}{4}\operatorname{sgn} d - \operatorname{sgn} d \cdot s(b, d) + \frac{1}{4} - \frac{(1+\operatorname{sgn} c)(1-\operatorname{sgn} d)}{4}. \end{aligned}$$

Aus der expliziten Formel für die Dedekindschen Summen in (1. 9) erhält man nun durch Summationstransformation und Beachtung der für nicht-ganzes x gültigen Spiegelungsformel $P_1(-x) = -P_1(x)$ sofort die Gleichungen

$$s(a, c) = s(d, c), \quad s(b, d) = -s(c, d).$$

Somit wird weiter

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} c \cdot s(d, c) + \operatorname{sgn} d \cdot s(c, d) &= \frac{ad + d^2 - bc + c^2}{12cd} - \frac{1}{4}\operatorname{sgn}(cd) \\ &= \frac{d^2 + c^2 + 1}{12cd} - \frac{1}{4}\operatorname{sgn}(cd), \end{aligned}$$

letzteres unter Beachtung der Gleichung $ad - bc = 1$. Damit ergibt sich endlich die für ein beliebiges ganzzahliges, teilerfremdes Zahlenpaar c, d, mit $cd \neq 0$, gültige grundlegende *Reziprozitätsformel für die Dedekindschen Summen* (Dedekind [2], Tannery-Molk [24])

$$\text{(1. 12)} \quad \operatorname{sgn} c \cdot s(d, c) + \operatorname{sgn} d \cdot s(c, d) = \frac{d}{12c} + \frac{c}{12d} + \frac{1}{12cd} - \frac{1}{4}\operatorname{sgn}(cd),$$

oder auch

$$12cd\left(\operatorname{sgn} c \cdot s(d, c) + \operatorname{sgn} d \cdot s(c, d)\right) = c^2 + d^2 + 1 - 3\,|\,cd\,|.$$

Man führe nun mit Rademacher [18] die folgende *Matrixfunktion* ein:

$$\text{(1. 13)} \qquad \Phi(M) = \Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{a+d}{c} - 12\operatorname{sgn} c \cdot s(a, c) & \text{für } c \neq 0, \\[2ex] \dfrac{b}{d} & \text{für } c = 0,\ d = \pm 1. \end{cases}$$

Hiermit schreibt sich dann die Transformationsformel (1. 8) in der Gestalt

$$(1.\,14)\qquad \log\frac{\sqrt[24]{\Delta\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}} = \operatorname{sgn}\frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i}\,\pi i\left(-\frac{1}{4}\operatorname{sgn} c + \frac{1}{12}\,\Phi(M)\right),$$

und die triviale Transformationsformel (1. 11) lautet

$$(1.\,15)\qquad \log\frac{\sqrt[24]{\Delta\left(M_0^{\pm}\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\dfrac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i}\,\dfrac{2\pi i}{24}\,\Phi(M_0^+) & \text{für } M_0^+, \\[2ex] \operatorname{sgn}\dfrac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i}\,\dfrac{2\pi i}{24}\,(-6+\Phi(M_0^-)) & \text{für } M_0^-. \end{cases}$$

Es seien jetzt $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ zwei beliebige ganzzahlige unimodulare Matrizen, $M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = M_1 M_2$ ihr Produkt. Dann folgert man bei Hintereinanderausführung der entsprechenden Modulsubstitutionen aus den vorstehenden Transformationsformeln durch Vergleichung die folgende *Kompositionsregel für die Matrixfunktion* $\Phi(M)$ (Rademacher [18]):

$$(1.\,16)\qquad \Phi(M_3) = \Phi(M_1) + \Phi(M_2) - 3\operatorname{sgn}(c_1 c_2 c_3).$$

Die beiden funktionentheoretischer Quelle entstammenden Formeln (1. 12) und (1. 16) beinhalten Aussagen elementar-arithmetischer Natur, und es entsteht somit die Aufgabe, die Beweise hierfür auch auf rein-arithmetischem Wege zu erbringen.

§ 2. Umformungen Dedekindscher Summen und independenter Beweis der Reziprozitätsformel.

1. Es seien m und n positive ganze, zueinander teilerfremde Zahlen, ferner ζ_n eine beliebige primitive n-te Einheitswurzel. Dann betrachte man, einem Ansatz von Maier [13] folgend, die Doppelsumme

$$(2.\,1)\qquad s_{m,n} = \sum_{\varkappa \bmod n}{}' \sum_{\lambda \bmod n}{}' \frac{\zeta_n^{m\lambda}+1}{\zeta_n^{m\lambda}-1}\,\zeta_n^{-\varkappa\lambda}\log(1-\zeta_n^{\varkappa}).$$

Hierin ist die Summation jeweils über ein beliebiges vollständiges System von Resten $\varkappa \not\equiv 0 \bmod n$ bzw. $\lambda \not\equiv 0 \bmod n$ zu erstrecken, und der Logarithmus ist durchweg als Hauptwert, mit Imaginärteil zwischen $-\frac{\pi i}{2}$ und $\frac{\pi i}{2}$, zu nehmen. Man erkennt durch Summationstransformation, daß die komplexe Zahl $s_{m,n}$ rein-imaginär ist. Vermöge der Formel

$$\log(1-e^{2\pi i x}) = \log 2\,|\sin \pi x| + \pi i P_1(x) \text{ für } x \not\equiv 0 \bmod^{+} 1$$

lassen sich die Logarithmen in (2. 1) eliminieren. Man erhält so auch, falls speziell $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ gewählt wird,

$$(2.\,2)\qquad \begin{aligned} s_{m,n} &= \pi i \sum_{\varkappa \bmod n}{}' \sum_{\lambda \bmod n}{}' \frac{\zeta_n^{m\lambda}+1}{\zeta_n^{m\lambda}-1}\,\zeta_n^{-\varkappa\lambda}\cdot P_1\left(\frac{\varkappa}{n}\right) \\ &= \pi \sum_{\varkappa \bmod n}{}' \sum_{\lambda \bmod n}{}' \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi m}{n}\lambda\right)\zeta_n^{-\varkappa\lambda}\cdot P_1\left(\frac{\varkappa}{n}\right), \end{aligned}$$

da die Summation über die logarithmischen Bestandteile keinen Beitrag zur Summe $s_{m,n}$ liefert. Vollzieht man zunächst weiter die Summation nach $\varkappa \bmod n$, so ergibt sich der geschlossene Ausdruck

$$(2.3)\qquad \sum_{\varkappa \bmod n}' \zeta_n^{-\varkappa\lambda} P_1\left(\frac{\varkappa}{n}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta_n^\lambda+1}{\zeta_n^\lambda-1} = \frac{i}{2}\cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n}\lambda\right).$$

Damit wird einerseits

$$(2.4)\qquad s_{m,n} = \frac{\pi i}{2}\sum_{\lambda \bmod n}' \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi m}{n}\lambda\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n}\lambda\right).$$

Schreibt man dagegen $s_{m,n}$ nach Summationstransformation in der Gestalt

$$s_{m,n} = \pi i \sum_{\varkappa \bmod n}' \sum_{\lambda \bmod n}' \frac{\zeta_n^\lambda+1}{\zeta_n^\lambda-1}\,\zeta_n^{-\varkappa\lambda}\cdot P_1\left(\frac{m}{n}\varkappa\right),$$

so kann man auch zuerst die Summation nach $\lambda \bmod n$ in geschlossener Form durchführen. Man schreibe nämlich einfach

$$\sum_{\lambda \bmod n}' \frac{\zeta_n^\lambda+1}{\zeta_n^\lambda-1}\,\zeta_n^{-\varkappa\lambda} = \sum_{\lambda \bmod n}' \frac{\zeta_n^\lambda+1}{\zeta_n^\lambda-1}\,(\zeta_n^{-\varkappa\lambda}-1).$$

Durch Entwicklung in geometrische Reihen und Aufsummation erhält man dann zunächst die Formel von Eisenstein [3] (Stern [23], Rédei [22])

$$(2.5)\qquad \sum_{\lambda \bmod n}' \frac{\zeta_n^\lambda+1}{\zeta_n^\lambda-1}\,\zeta_n^{-\varkappa\lambda} = 2n\,P_1\left(\frac{\varkappa}{n}\right).$$

Damit wird andererseits

$$(2.6)\qquad s_{m,n} = 2\pi i n \sum_{\varkappa \bmod n}' P_1\left(\frac{m}{n}\varkappa\right) P_1\left(\frac{\varkappa}{n}\right),$$

und durch diese Darstellung ist die Summe $s_{m,n}$ auf Grund der Definitionsgleichung (1. 9) mit der Dedekindschen Summe $s(m,n)$ vermöge der Relation

$$(2.7)\qquad s_{m,n} = 2\pi i n\cdot s(m,n)$$

verknüpft. Auf diese Weise hat man jetzt nach (2. 4) und (2. 6) für die Dedekindsche Summe $s(m,n)$ selbst die beiden formal ganz verschiedenen Darstellungen (Rademacher [19])

$$(2.8)\qquad s(m,n) = \sum_{\varkappa \bmod n}' P_1\left(\frac{m}{n}\varkappa\right) P_1\left(\frac{\varkappa}{n}\right) = \frac{1}{4n}\sum_{\varkappa \bmod n}' \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi m}{n}\varkappa\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n}\varkappa\right).$$

Statt der trigonometrischen Formel für $s(m,n)$ kann man hierfür auch einen Ausdruck in der Gaußschen Funktion $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ angeben, wodurch der logarithmische Ansatz in (2. 1) eigentlich erst begründet erscheint (Maier [13]). Nach Gauß [6] (Nielsen [17], Lösch-Schoblik [12]) besteht für ein rationales Argument $\dfrac{p}{q}$ mit $0 < \dfrac{p}{q} < 1$, $q > 0$ die Formel

$$(2.9)\qquad \Psi\left(\frac{p}{q}\right) + \log q + C = \sum_{\varrho \bmod q}' \zeta_q^{-p\varrho}\log(1-\zeta_q^\varrho),$$

wo $C = -\Psi(1)$ die Eulersche Konstante bezeichnet. Damit wird dann auch (Mellin [14])

$$(2.10)\qquad s(m,n) = -\frac{1}{2\pi n}\sum_{\lambda=1}^{n-1}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi m}{n}\lambda\right)\Psi\left(\frac{\lambda}{n}\right).$$

Diese letzte Formel ergibt sich übrigens auch unmittelbar aus der trigonometrischen Darstellung für $s(m, n)$ in (2. 8), wenn man darin vermöge der Beziehung

$$\Psi(x) - \Psi(1 - x) = -\pi \operatorname{ctg} \pi x$$

die Gaußsche Funktion $\Psi(x)$ einführt.

2. Eine andersartige, außerordentlich wichtige Umgestaltung läßt sich nun noch für den Fall eines ungeraden n mit der Dedekindschen Summe $s(m, n)$ vornehmen. Sei also jetzt neben $(m, n) = 1$ auch noch $n \equiv 1 \bmod 2$ vorausgesetzt. Dann erhält man aus der trigonometrischen Darstellung durch die Summationstransformation $\varkappa \to 2\varkappa$ der Reihe nach zunächst

$$\begin{aligned} s(m, n) &= \frac{1}{4n} \sum_{\varkappa \bmod n}' \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi m}{n}\varkappa\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{n}\varkappa\right) \\ &= \frac{1}{8n}\left(\sum_{\varkappa \bmod n}' \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi m}{n}\varkappa\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n}\varkappa\right) - \sum_{\varkappa \bmod n}' \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi m}{n}\varkappa\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\varkappa\right)\right) \\ &= \frac{1}{8n}\left(\frac{1}{2} \sum_{\varkappa \bmod n}' \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi m}{n}\varkappa\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n}\varkappa\right) - \frac{1}{2} \sum_{\varkappa \bmod n}' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi m}{n}\varkappa\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n}\varkappa\right)\right. \\ &\qquad \left. - \sum_{\varkappa \bmod n}' \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi m}{n}\varkappa\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\varkappa\right)\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt nach (2. 8) durch Vergleichung

$$\frac{3}{4} s(m, n) = \frac{1}{4n}\left(-\frac{1}{4} \sum_{\varkappa \bmod n}' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi m}{n}\varkappa\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n}\varkappa\right) - \frac{1}{2} \sum_{\varkappa \bmod n}' \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi m}{n}\varkappa\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\varkappa\right)\right),$$

oder auch, wenn man in der ersten Summe rechts wieder $\varkappa \to 2\varkappa$ ersetzt und sodann in beiden Summen die Summation auf die erste Hälfte des normierten ursprünglichen Summationsbereichs beschränkt,

$$(2.\,11) \quad \frac{3}{4} s(m, n) = \frac{1}{4n}\left(-\frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi m}{n}\varkappa\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{n}\varkappa\right) - \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\varkappa\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi m}{n}\varkappa\right)\right).$$

Die rechte Seite von (2. 11) läßt sich nun wieder in rationaler Form schreiben. Dazu knüpfe man an (2. 5) an. Ersetzt man hierin $\varkappa \to m\varkappa$, ferner den Summationsbuchstaben $\lambda \to 2\lambda$, so erhält man durch Summation über die erste Hälfte des vollen Summationsbereichs $\varkappa \not\equiv 0 \bmod n$

$$\begin{aligned} \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} P_1\left(\frac{m}{n}\varkappa\right) &= \frac{1}{2n} \sum_{\lambda \bmod n}' \frac{\zeta_n^{2\lambda}+1}{\zeta_n^{2\lambda}-1} \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} \zeta_n^{-2m\lambda\varkappa} = -\frac{1}{2n} \sum_{\lambda \bmod n}' \frac{\zeta_n^{2\lambda}+1}{\zeta_n^{2\lambda}-1} \cdot \frac{1}{\zeta_n^{m\lambda}+1} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{\lambda \bmod n}' \frac{\zeta_n^{2\lambda}+1}{\zeta_n^{2\lambda}-1} \cdot \frac{\zeta_n^{m\lambda}}{\zeta_n^{m\lambda}+1}, \end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned} (2.\,12) \quad \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} P_1\left(\frac{m}{n}\varkappa\right) &= \frac{1}{4n} \sum_{\lambda \bmod n}' \frac{\zeta_n^{2\lambda}+1}{\zeta_n^{2\lambda}-1} \cdot \frac{\zeta_n^{m\lambda}-1}{\zeta_n^{m\lambda}+1} \\ &= \frac{1}{4n} \sum_{\lambda \bmod n}' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi m}{n}\lambda\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{n}\lambda\right) = \frac{1}{2n} \sum_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi m}{n}\lambda\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{n}\lambda\right). \end{aligned}$$

Führt man nun einen socius m' zu m ein, d. h. eine Lösung der Kongruenz

$$mm' \equiv 1 \bmod n,$$

so ergibt sich aus (2. 11) unter Beachtung der letzten Gleichung (2. 12) gerade die gesuchte wichtige Formel

$$(2.\ 13)\qquad s(m,n) = -\frac{1}{3}\sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} P_1\left(\frac{2m}{n}\varkappa\right) - \frac{2}{3}\sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} P_1\left(\frac{m'}{n}\varkappa\right),$$

worin, im Gegensatz zur ursprünglichen Definitionsformel (1. 9), die Funktion $P_1(x)$ nur linear auftritt.

Für diese auf Riemann und Dedekind zurückgehende Formel haben Rademacher und Whiteman [21] einen ganz anderen, rein-rationalen Beweis gegeben. Unter Einführung des größten Ganzen $[x]$ unterhalb x kann man wegen $P_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ hierfür auch schreiben

$$(2.\ 14)\quad s(m,n) = \frac{1}{3}\sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2m}{n}\varkappa\right] + \frac{2}{3}\sum_{\varkappa=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{m'}{n}\varkappa\right] + \frac{n-1}{4} - \frac{n^2-1}{12}\cdot\frac{m+m'}{n}.$$

Dieser letzten Formel für $s(m, n)$ kann man eine entsprechende an die Seite stellen, wenn man in der ursprünglichen Definitionsgleichung die Funktion $P_1(x)$ durch die arithmetische Funktion $[x]$ ersetzt. Nach (1. 9) bzw. (2. 8) ergibt sich so leicht

$$(2.\ 15)\quad s(m,n) = -\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\left[\frac{m}{n}\nu\right] + m\frac{(n-1)(2n-1)}{6n} - \frac{n-1}{4},$$

was dann auch für gerades n mit $(m, n) = 1$ richtig ist.

Aus den beiden letzten Darstellungen (2. 14) bzw. (2. 15) entnimmt man unmittelbar, daß die Dedekindsche Summe $s(m, n)$ im allgemeinen den genauen Nenner $6n$ besitzt. Ferner folgt einerseits aus (2. 14) die Kongruenz

$$(2.\ 16)\qquad 12n\cdot s(m,n) \equiv m + m' \bmod n,$$

andererseits für denselben Ausdruck aus (2. 15) die Kongruenz

$$(2.\ 17)\qquad 12n\cdot s(m,n) \equiv -12\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\left[\frac{m}{n}\nu\right] + 2m \bmod n.$$

Zusammengenommen hat man also

$$12\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\left[\frac{m}{n}\nu\right] \equiv 2m - (m+m') \equiv m - m' \bmod n,$$

d. h.

$$(2.\ 18)\qquad m' \equiv m - 12\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\left[\frac{m}{n}\nu\right] \bmod n.$$

Hierdurch ist in Erweiterung eines Ergebnisses von Lerch [10], der n als Primzahl annimmt, für den socius m' zu m mod n (das Inverse zu m in der primen Restklassengruppe mod n) ein expliziter Ausdruck angegeben. Die Darstellung (2. 18) gilt übrigens, wie Rademacher [18] vermöge (1. 12) gezeigt hat, auch für den hier ausgelassenen Fall eines geraden n mit $(m, n) = 1$.

3. Der Beweis für die grundlegende Reziprozitätsformel der Dedekindschen Summen in (1. 12) läßt sich, ganz unabhängig von der in § 1 gegebenen funktionentheoretischen Herleitung, auf eine einfache rein-algebraische Identität gründen. Hierbei können offenbar in Hinblick auf die trivialen Regeln

$$(2.\ 19)\qquad s(m,-n) = s(m,n),\quad s(-m,n) = -s(m,n)$$

m und n, wie bisher in § 2, als positive ganze, zueinander teilerfremde Zahlen vorausgesetzt werden.

Es sei ζ_m eine beliebige primitive m-te, ζ_n eine beliebige primitive n-te Einheitswurzel. Dann gilt identisch

$$(2.\,20)\qquad m\,\frac{x^m+1}{x^m-1}=\sum_{\mu \bmod m}\frac{\zeta_m^\mu x+1}{\zeta_m^\mu x-1},\qquad n\,\frac{x^n+1}{x^n-1}=\sum_{\nu \bmod n}\frac{\zeta_n^\nu x+1}{\zeta_n^\nu x-1}.$$

Mittels dieser Partialbruchformeln kann man die einfachen trigonometrischen Summendarstellungen für die Dedekindschen Summen $s(m,n)$ und $s(n,m)$ in (2. 8) zu einer Doppelsummendarstellung jeweils auseinanderziehen. Man erhält so in komplexer Form zunächst

$$-4mn\cdot s(m,n)=m\sum_{\lambda \bmod n}{}'\frac{\zeta_n^{m\lambda}+1}{\zeta_n^{m\lambda}-1}\cdot\frac{\zeta_n^\lambda+1}{\zeta_n^\lambda-1}=\sum_{\lambda \bmod n}{}'\left(\sum_{\mu \bmod m}\frac{\zeta_m^\mu\zeta_n^\lambda+1}{\zeta_m^\mu\zeta_n^\lambda-1}\right)\cdot\frac{\zeta_n^\lambda+1}{\zeta_n^\lambda-1},$$

$$-4mn\cdot s(n,m)=n\sum_{\varkappa \bmod m}{}'\frac{\zeta_m^{n\varkappa}+1}{\zeta_m^{n\varkappa}-1}\cdot\frac{\zeta_m^\varkappa+1}{\zeta_m^\varkappa-1}=\sum_{\varkappa \bmod m}{}'\left(\sum_{\nu \bmod n}\frac{\zeta_n^\nu\zeta_m^\varkappa+1}{\zeta_n^\nu\zeta_m^\varkappa-1}\right)\cdot\frac{\zeta_m^\varkappa+1}{\zeta_m^\varkappa-1}.$$

Daraus folgt durch Addition, unter Beachtung von (2. 8),

$$\begin{aligned}
&-4mn\,(s(m,n)+s(n,m))=\\
&=\sum_{\nu \bmod n}{}'\sum_{\mu \bmod m}{}'\frac{\zeta_n^\nu\zeta_m^\mu+1}{\zeta_n^\nu\zeta_m^\mu-1}\left(\frac{\zeta_n^\nu+1}{\zeta_n^\nu-1}+\frac{\zeta_m^\mu+1}{\zeta_m^\mu-1}\right)+\sum_{\nu \bmod n}{}'\left(\frac{\zeta_n^\nu+1}{\zeta_n^\nu-1}\right)^2+\sum_{\mu \bmod m}{}'\left(\frac{\zeta_m^\mu+1}{\zeta_m^\mu-1}\right)^2\\
&=2\sum_{\nu \bmod n}{}'\sum_{\mu \bmod m}{}'\frac{\zeta_n^\nu\zeta_m^\mu+1}{(\zeta_n^\nu-1)(\zeta_m^\mu-1)}-4n\cdot s(1,n)-4m\cdot s(1,m)\\
&=2\sum_{\nu \bmod n}{}'\sum_{\mu \bmod m}{}'\left(1+\frac{1}{\zeta_n^\nu-1}+\frac{1}{\zeta_m^\mu-1}+\frac{2}{(\zeta_n^\nu-1)(\zeta_m^\mu-1)}\right)-4n\cdot s(1,n)-4m\cdot s(1,m).
\end{aligned}$$

Hierin ist nun

$$\sum_{\nu \bmod n}{}'\frac{1}{\zeta_n^\nu-1}=\sum_{\nu \bmod n}{}'\frac{1}{\zeta_n^{-\nu}-1}=-\sum_{\nu \bmod n}{}'\frac{\zeta_n^\nu}{\zeta_n^\nu-1},$$

also

$$\sum_{\nu \bmod n}{}'\frac{1}{\zeta_n^\nu-1}=-\frac{1}{2}\sum_{\nu \bmod n}{}'1=-\frac{n-1}{2};$$

analog ist

$$\sum_{\mu \bmod m}{}'\frac{1}{\zeta_m^\mu-1}=-\frac{m-1}{2}.$$

Ferner ist die spezielle Dedekindsche Summe

$$s(1,n)=\sum_{\nu \bmod n}{}'P_1^2\left(\frac{\nu}{n}\right)=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{\nu}{n}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{n}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6n};$$

analog ist

$$s(1,m)=\frac{m}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6m}.$$

Trägt man die rationalen Werte aller dieser Summen auf der rechten Seite ein, so wird weiter

$$\begin{aligned}
&-4mn\,(s(m,n)+s(n,m))=\\
&=2\left((m-1)(n-1)-\frac{(m-1)(n-1)}{2}-\frac{(m-1)(n-1)}{2}+\frac{(m-1)(n-1)}{2}\right)\\
&\quad-4n\left(\frac{n}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6n}\right)-4m\left(\frac{m}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6m}\right)=mn-\frac{m^2}{3}-\frac{n^2}{3}-\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

oder endlich auch

$$(2.\,21)\qquad 12mn\,(s(m,n)+s(n,m))=m^2+n^2+1-3mn.$$

Hieraus folgt schließlich nach (2. 19) unmittelbar die *allgemeine Reziprozitätsformel der Dedekindschen Summen* für ein beliebiges ganzzahliges, teilerfremdes Zahlenpaar m, n mit $mn \neq 0$:

$$(2.\ 22)\quad 12mn\big(\operatorname{sgn} n \cdot s(m, n) + \operatorname{sgn} m \cdot s(n, m)\big) = m^2 + n^2 + 1 - 3\,|\,mn\,|.$$

Setzt man der Einfachheit halber wieder m und n als natürliche Zahlen voraus, so läßt sich die obige Reziprozität (2. 21) unter Benutzung der Darstellung (2. 15) für die Dedekindschen Summen auch in der folgenden damit gleichbedeutenden, gelegentlich von Rademacher [18] hervorgehobenen arithmetischen Form wiedergeben:

$$(2.\ 23)\quad m\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu\left[\frac{m}{n}\,\nu\right] + n\sum_{\mu=1}^{m-1}\mu\left[\frac{n}{m}\,\mu\right] = \frac{1}{12}\,(m-1)(n-1)(8mn - m - n - 1).$$

§ 3. Die Kompositionsregel für die Matrixfunktion $\Phi(M)$.

1. Es sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige ganzzahlige unimodulare Matrix mit der Determinante $|\,M\,| = ad - bc = +1$. Dann ordne man mit Rademacher [18], wie schon in (1. 13) geschehen, der Matrix M eine Zahl $\Phi(M)$ zu auf Grund der folgenden Bildungsvorschrift:

$$(3.\ 1)\qquad \Phi(M) = \Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{a+d}{c} - 12 \operatorname{sgn} c \cdot s(a, c) & \text{für } c \neq 0, \\[2ex] \dfrac{b}{d} & \text{für } c = 0,\ d = \pm 1. \end{cases}$$

Offenbar ist $\Phi(M)$ eine rational-wertige Funktion. Darüber hinaus gilt, daß die Werte dieser Matrixfunktion sogar ganzrationale Zahlen sind. Für den Fall $c = 0$ ist das trivial. Für den Fall eines ungeraden $c \neq 0$ wird es durch die Formel (2. 14), unter Beachtung der ersten Regel in (2. 19) bei negativem c, in Evidenz gesetzt. Ist jedoch c eine gerade Zahl, so kommt man vermöge der aus der Reziprozitätsformel (1. 12), (2. 22) folgenden Umformung

$$(3.\ 2)\qquad \frac{a+d}{c} - 12 \operatorname{sgn} c \cdot s(a, c) = \frac{b-c}{a} + 3 \operatorname{sgn}(ac) + 12 \operatorname{sgn} a \cdot s(c, a)$$

auf den vorigen Fall zurück, da jetzt notwendig a eine ungerade Zahl ist.

2. Es seien M_1, M_2 zwei ganzzahlige unimodulare Matrizen der Determinante $+1$, $M_3 = M_1 M_2$ ihr Produkt. Dann gilt die folgende, schon in (1. 16) erwähnte, *Kompositionsregel für die Matrixfunktion* $\Phi(M)$ (Rademacher [18])

$$(3.\ 3)\qquad \Phi(M_3) = \Phi(M_1) + \Phi(M_2) - 3 \operatorname{sgn}(c_1 c_2 c_3).$$

Zum Beweis dieser Regel stützt man sich auf die bekannte algebraische Struktur der (engeren) Modulgruppe Γ. Seien dazu

$$(3.\ 4)\quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad U = ST = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } T^2 = U^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die geläufigen (abhängigen) speziellen Erzeugenden von Γ.

Da nach der Definition (3. 1) $\Phi(-M) = \Phi(M)$ ist, kann man sich bei der weiteren Betrachtung auf die inhomogene Modulgruppe beschränken, worin dann insbesondere die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit der Einheitsmatrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gleichbedeutend ist. Bezeichnen nun, dieser Auffassung zufolge,

$$(3.\ 5)\qquad \{T\} = (I, T),\quad \{U\} = (I, U, U^2)$$

die von den Elementen T der Ordnung 2 und U der Ordnung 3 erzeugten zweigliedrigen bzw. dreigliedrigen Zyklen innerhalb Γ, so läßt sich die (engere) inhomogene Modulgruppe Γ als das freie Produkt ebendieser beiden zyklischen Untergruppen darstellen:

$$\Gamma = \{T\} * \{U\}. \tag{3. 6}$$

Auf Grund dieser Zerlegung ist es möglich, die Kompositionsregel (3. 3) durch vollständige Induktion zu beweisen. Hierzu denke man sich den zweiten Faktor M_2 von $M_3 = M_1 M_2$ in der genannten Weise (3. 6) dargestellt; ihm kommt dann eine eindeutig bestimmte Länge $n = n(M_2)$, nämlich die Anzahl der Faktoren bezüglich dieser Zerlegung zu. Die Kompositionsregel (3. 3) sei nun schon für beliebiges M_1 und alle M_2 mit einer Länge $\leqq n$ als bewiesen angesehen. Da diese Annahme für den Fall $n = 0$, wo dann $M_2 = I$, $c_2 = 0$ ist, wegen $\Phi(I) = 0$ offenbar stimmt, ist hiermit die Möglichkeit eines Induktionsbeweises nach n gegeben. Um den vollständigen Beweis zu erbringen, hat man in Hinblick auf (3. 6) dann lediglich das Bestehen der folgenden speziellen Formeln nachzuweisen:

$$\Phi(M_1(M_2T)) = \Phi(M_1) + \Phi(M_2T) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{M_2T} c_{M_1M_2T}) \tag{3. 7}$$

$$\Phi(M_1(TM_2)) = \Phi(M_1) + \Phi(TM_2) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{TM_2} c_{M_1TM_2}) \tag{3. 8}$$

$$\Phi(M_1(M_2U)) = \Phi(M_1) + \Phi(M_2U) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{M_2U} c_{M_1M_2U}) \tag{3. 9}$$

$$\Phi(M_1(UM_2)) = \Phi(M_1) + \Phi(UM_2) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{UM_2} c_{M_1UM_2}) \tag{3. 10}$$

$$\Phi(M_1(M_2U^2)) = \Phi(M_1) + \Phi(M_2U^2) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{M_2U^2} c_{M_1M_2U^2}) \tag{3. 11}$$

$$\Phi(M_1(U^2M_2)) = \Phi(M_1) + \Phi(U^2M_2) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{U^2M_2} c_{M_1U^2M_2}). \tag{3. 12}$$

Hierin bezeichnen, in zweckmäßiger Abänderung der früheren Bezeichnungsweise, die indizierten Elemente c jeweils das erste Element aus der zweiten Zeile derjenigen Matrix, die als Index angefügt ist.

Beim Beweis der Formel (3. 7) kommt es offenbar auf die Berechnung des Symbols Φ für Matrizen der Form XT an. Sei demzufolge allgemein angesetzt

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } XT = \begin{pmatrix} y & -x \\ v & -u \end{pmatrix}.$$

Dann wird nach (3. 1)

$$\Phi(XT) = \Phi\begin{pmatrix} y & -x \\ v & -u \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{y-u}{v} - 12 \operatorname{sgn} v \cdot s(y, v) & \text{für } v \neq 0, \\ \dfrac{x}{u} & \text{für } v = 0,\ u = \pm 1. \end{cases}$$

Ist zunächst $u \neq 0$, $v \neq 0$, so hat man nach der Umformung (3. 2)

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= \frac{x+v}{u} - 12 \operatorname{sgn} u \cdot s(x, u) \\ &= \frac{y-u}{v} + 3 \operatorname{sgn}(uv) + 12 \operatorname{sgn} v \cdot s(u, v) = \Phi(XT) + 3 \operatorname{sgn}(uv), \end{aligned}$$

letzteres wegen $s(u, v) = -s(y, v)$. Somit gilt in diesem Fall die Regel

$$\Phi(XT) = \Phi(X) - 3 \operatorname{sgn}(uv).$$

Ist dagegen $u \neq 0$, aber $v = 0$, somit $uy = -1$, so hat man

$$\Phi(XT) = \frac{x}{u} = \pm x,$$

während

$$\Phi(X) = \frac{x}{u} - 12 \operatorname{sgn} u \cdot s(x, 1) = \pm x$$

ist. Somit gilt in diesem Fall die Regel

$$\Phi(XT) = \Phi(X).$$

Ist schließlich $v \neq 0$, aber $u = 0$, somit $vx = 1$, so hat man

$$\Phi(XT) = \frac{y}{v} - 12 \operatorname{sgn} v \cdot s(y, 1) = \pm y$$

während

$$\Phi(X) = \frac{y}{v} = \pm y$$

ist. Somit gilt in diesem Fall die Regel

$$\Phi(XT) = \Phi(X).$$

Speziell ist danach für $X = I$

$$\Phi(T) = \Phi(I) = 0.$$

Zusammengenommen folgt daraus, daß in jedem Fall die Kompositionsregel

$$\Phi(XT) = \Phi(X) - 3 \operatorname{sgn}(uv) \tag{3.13}$$

für die unimodulare Matrix $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ gilt.

Jetzt erhält man nach dieser letzten Regel für die linke Seite von (3. 7)

$$\Phi(M_1(M_2 T)) = \Phi((M_1 M_2) T) = \Phi(M_1 M_2) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1 M_2} d_{M_1 M_2}),$$

und dies ist nach Induktionsvoraussetzung weiterhin gleich

$$\Phi(M_1) + \Phi(M_2) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{M_2} c_{M_1 M_2}) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1 M_2} d_{M_1 M_2}).$$

Für die rechte Seite von (3. 7) dagegen erhält man nach derselben Regel

$$\Phi(M_1) + \Phi(M_2) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_2} d_{M_2}) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{M_2 T} c_{M_1 M_2 T}).$$

Die Formel (3. 7) wird also bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß die Vorzeichenrelation

$$\operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{M_2} c_{M_1 M_2}) + \operatorname{sgn}(c_{M_1 M_2} d_{M_1 M_2}) = \operatorname{sgn}(c_{M_2} d_{M_2}) + \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{M_2 T} c_{M_1 M_2 T})$$

besteht. Führt man für die hierin auftretenden Koeffizienten ihre expliziten Werte ein, so kann man die fragliche Beziehung in der ursprünglichen Indizierung durchsichtiger auch so schreiben:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}(c_1 c_2 (c_1 a_2 + d_1 c_2)) + \operatorname{sgn}((c_1 a_2 + d_1 c_2)(c_1 b_2 + d_1 d_2)) \\ &= \operatorname{sgn}(c_2 d_2) + \operatorname{sgn}(c_1 d_2 (c_1 b_2 + d_1 d_2)). \end{aligned}$$

Ist zunächst $c_1 = 0$, somit $d_1 \neq 0$, so ist diese Relation offenbar richtig. Ist weiter $c_2 = 0$, so ist die Relation wegen $a_2 d_2 = 1$, $\operatorname{sgn} a_2 = \operatorname{sgn} d_2$ ebenfalls erfüllt. Ist endlich $d_2 = 0$, so ist die Relation wegen $b_2 c_2 = -1$, $\operatorname{sgn} b_2 = -\operatorname{sgn} c_2$ auch richtig. Damit sind die trivialen Fälle erledigt, und es sei jetzt $c_1 c_2 d_2 \neq 0$ angenommen. Dann setze man

$$x = \frac{c_1 a_2 + d_1 c_2}{c_1 c_2}, \quad y = \frac{c_1 b_2 + d_1 d_2}{c_1 d_2}, \quad \text{somit } x - y = \frac{1}{c_2 d_2}.$$

Mit diesen Abkürzungen nimmt dann die fragliche Vorzeichenrelation die folgende Gestalt an:

$$\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn}(xy(x-y)) = \operatorname{sgn}(x-y) + \operatorname{sgn} y. \tag{3.14}$$

Diese Beziehung zwischen den verschiedenen Vorzeichen erweist sich nun aber, wie man sofort erkennt, als Identität in x und y (Rademacher [18]).

Damit ist die Formel (3. 7) bewiesen. Der Beweis der Formel (3. 8) verläuft, teilweise unter Benutzung von (3. 13) und insbesondere (3. 14), ähnlich und kann daher unterbleiben.

Beim Beweis der Formel (3. 9) kommt es offenbar auf die Berechnung des Symbols Φ für Matrizen der Form XU an. Sei demzufolge allgemein angesetzt

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad XU = \begin{pmatrix} x+y & -x \\ u+v & -u \end{pmatrix}.$$

Dann wird nach (3. 1)

$$\Phi(XU) = \Phi\begin{pmatrix} x+y & -x \\ u+v & -u \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{x+y-u}{u+v} - 12 \operatorname{sgn}(u+v) \cdot s(x+y, u+v) & \text{für } u+v \neq 0, \\ \dfrac{x}{u} & \text{für } u+v = 0,\ u = \pm 1. \end{cases}$$

Nun ist nach Definition (3. 4) $U = ST$. Somit wird nach (3. 13) zunächst

$$\Phi(XU) = \Phi(X(ST)) = \Phi((XS)\,T) = \Phi(XS) - 3 \operatorname{sgn}(c_{XS} d_{XS}).$$

Hierin ist

$$XS = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ u & u+v \end{pmatrix},$$

so daß

$$\Phi(XU) = \Phi(XS) - 3 \operatorname{sgn}(u(u+v)) \tag{3.15}$$

wird. Speziell ist danach für $X = I$ wegen $\Phi(S) = 1$

$$\Phi(U) = \Phi(S) - 3 \operatorname{sgn} 0 = 1.$$

Weiter ist nun allgemein nach (3. 1)

$$\Phi(XS) = \Phi\begin{pmatrix} x & x+y \\ u & u+v \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{x+u+v}{u} - 12 \operatorname{sgn} u \cdot s(x, u) & \text{für } u \neq 0, \\ \dfrac{x+y}{v} = 1 \pm y & \text{für } u = 0. \end{cases}$$

Durch Vergleich mit der Darstellung für $\Phi(X)$ ergibt sich danach die Regel

$$\Phi(XS) = \Phi(X) + 1. \tag{3.16}$$

Aus (3. 15) und (3. 16) zusammen folgt endlich, daß die Kompositionsregel

$$\Phi(XU) = \Phi(X) + 1 - 3 \operatorname{sgn}(u(u+v)) \tag{3.17}$$

für die unimodulare Matrix $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ gilt.

Jetzt erhält man nach dieser letzten Regel für die linke Seite von (3. 9)

$$\Phi(M_1(M_2 U)) = \Phi((M_1 M_2)\,U) = \Phi(M_1 M_2) + 1 - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1 M_2}(c_{M_1 M_2} + d_{M_1 M_2})),$$

und dies ist nach Induktionsvoraussetzung weiterhin gleich

$$\Phi(M_1) + \Phi(M_2) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{M_2} c_{M_1 M_2}) + 1 - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1 M_2}(c_{M_1 M_2} + d_{M_1 M_2})).$$

Für die rechte Seite von (3. 9) dagegen erhält man nach derselben Regel

$$\Phi(M_1) + \Phi(M_2) + 1 - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_2}(c_{M_2} + d_{M_2})) - 3 \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{M_1 U} c_{M_1 M_2 U}).$$

Die Formel (3. 9) wird also bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß die Vorzeichenrelation

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{M_2} c_{M_1 M_2}) &+ \operatorname{sgn}(c_{M_1 M_2}(c_{M_1 M_2} + d_{M_1 M_2})) \\ &= \operatorname{sgn}(c_{M_2}(c_{M_2} + d_{M_2})) + \operatorname{sgn}(c_{M_1} c_{M_2 U} c_{M_1 M_2 U})\end{aligned}$$

besteht. Führt man für die hierin auftretenden Koeffizienten ihre expliziten Werte ein, so kann man die fragliche Beziehung in der ursprünglichen Indizierung auch so schreiben:

$$\begin{aligned}&\operatorname{sgn}(c_1 c_2 (c_1 a_2 + d_1 c_2)) + \operatorname{sgn}((c_1 a_2 + d_1 c_2)(c_1 a_2 + d_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 d_2)) \\ &= \operatorname{sgn}(c_2(c_2 + d_2)) + \operatorname{sgn}(c_1(c_2 + d_2)(c_1 a_2 + d_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 d_2)).\end{aligned}$$

Ist zunächst $c_1 = 0$, somit $d_1 \neq 0$, so ist diese Relation offenbar richtig. Ist weiter $c_2 = 0$, so ist die Relation wegen $a_2 d_2 = 1$, $\operatorname{sgn} a_2 = \operatorname{sgn} d_2$ ebenfalls erfüllt. Ist endlich $c_2 + d_2 = 0$, so ist die Relation wegen $c_2 = -d_2 = \pm 1$, da $(c_2, d_2) = 1$, $a_2 + b_2 = \mp 1$ auch richtig. Damit sind die trivialen Fälle erledigt, und es sei jetzt $c_1 c_2 (c_2 + d_2) \neq 0$ angenommen. Setzt man dann

$$x = \frac{c_1 a_2 + d_1 c_2}{c_1 c_2}, \quad y = \frac{c_1 a_2 + d_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 d_2}{c_1(c_2 + d_2)}, \quad \text{somit } x - y = \frac{1}{c_2(c_2 + d_2)},$$

so kommt man wieder auf die Vorzeichenidentität (3. 14) zurück.

Damit ist die Formel (3. 9) bewiesen. Der Beweis der Formel (3. 10) verläuft, teilweise unter Benutzung von (3. 17) und insbesondere (3. 14), ähnlich und kann daher unterbleiben.

Beim Beweis der Formel (3. 11) kommt es offenbar auf die Berechnung des Symbols Φ für Matrizen der Form XU^2 an. Sei demzufolge allgemein angesetzt

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}, \quad U^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ mit } XU^2 = \begin{pmatrix} y & -x-y \\ v & -u-v \end{pmatrix}.$$

Dann wird nach (3. 1)

$$\Phi(XU^2) = \Phi\begin{pmatrix} y & -x-y \\ v & -u-v \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{y-u-v}{v} - 12 \operatorname{sgn} v \cdot s(y, v) & \text{für } v \neq 0, \\ \dfrac{x+y}{u+v} = \dfrac{x+y}{u} & \text{für } v = 0,\ u = \pm 1. \end{cases}$$

Unter zweimaliger Anwendung von (3. 17) erhält man nun weiter

$$\begin{aligned}\Phi(XU^2) &= \Phi((XU)\,U) = \Phi(XU) + 1 - 3 \operatorname{sgn}(c_{XU}(c_{XU} + d_{XU})) \\ &= \Phi(X) + 2 - 3 \operatorname{sgn}(u(u+v)) - 3 \operatorname{sgn}((u+v)v).\end{aligned}$$

Hierin lassen sich die Vorzeichen gemäß (3. 14) einheitlich zusammenziehen zu

$$\operatorname{sgn}(u(u+v)) + \operatorname{sgn}(v(u+v)) = 1 + \operatorname{sgn}(uv).$$

So ergibt sich endlich die Kompositionsregel

$$\Phi(XU^2) = \Phi(X) - 1 - 3 \operatorname{sgn}(uv). \tag{3. 18}$$

Speziell ist danach für $X = I$ wegen $\Phi(I) = 0$

$$\Phi(U^2) = \Phi(I) - 1 - 3 \operatorname{sgn} 0 = -1.$$

Jetzt erhält man nach der Regel (3. 18) für die linke Seite von (3. 11)

$$\Phi(M_1(M_2U^2)) = \Phi((M_1M_2)U^2) = \Phi(M_1M_2) - 1 - 3\operatorname{sgn}(c_{M_1M_2}d_{M_1M_2}),$$

und dies ist nach Induktionsvoraussetzung weiterhin gleich

$$\Phi(M_1) + \Phi(M_2) - 3\operatorname{sgn}(c_{M_1}c_{M_2}c_{M_1M_2}) - 1 - 3\operatorname{sgn}(c_{M_1M_2}d_{M_1M_2}).$$

Für die rechte Seite von (3. 11) dagegen erhält man nach derselben Regel

$$\Phi(M_1) + \Phi(M_2) - 1 - 3\operatorname{sgn}(c_2d_2) - 3\operatorname{sgn}(c_{M_1}c_{M_2U^2}c_{M_1M_2U^2}).$$

Die Formel (3. 11) wird also bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß die Vorzeichenrelation

$$\operatorname{sgn}(c_{M_1}c_{M_1}c_{M_1M_2}) + \operatorname{sgn}(c_{M_1M_2}d_{M_1M_2}) = \operatorname{sgn}(c_2d_2) + \operatorname{sgn}(c_{M_1}c_{M_2U^2}c_{M_1M_2U^2})$$

besteht.

Führt man für die hierin auftretenden Koeffizienten ihre expliziten Werte ein, so kann man die fragliche Beziehung in der ursprünglichen Indizierung auch so schreiben:

$$\begin{aligned}&\operatorname{sgn}(c_1c_2(c_1a_2 + d_1c_2)) + \operatorname{sgn}((c_1a_2 + d_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2))\\ &= \operatorname{sgn}(c_2d_2) + \operatorname{sgn}(c_1d_2(c_1b_2 + d_1d_2)),\end{aligned}$$

und diese Relation stimmt mit der im Beweis von (3. 7) am Ende auftretenden Vorzeichenrelation überein.

Damit ist die Formel (3. 11) bewiesen. Der Beweis der Formel (3. 12) verläuft, teilweise unter Benutzung von (3. 18) und insbesondere (3. 14), ähnlich und kann daher unterbleiben.

Nach diesen Einzelfeststellungen (3. 7) bis (3. 12) ist nun auch, wie angekündigt, der Beweis der allgemeinen Kompositionsregel (3.3) durch vollständige Induktion erbracht,

§ 4. Die Transformationsformel für die Funktion $\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}$ bei Modulsubstitutionen.

1. Es sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige ganzzahlige unimodulare Matrix mit der Determinante $|M| = +1$. Dann gilt für die gemäß (1. 3) im Unendlichen normierte 24-ste Wurzel aus der Diskriminante $\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}$ oder auch für die mit ihr durch die Beziehung (1. 5) zusammenhängende Dedekindsche Modulfunktion $\eta(\tau)$ nach (1. 8) bzw. (1. 11) die *Transformationsformel*

$$(4.\ 1)\qquad \frac{\sqrt[24]{\Delta\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}} = (c\tau + d)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\eta(M(\tau))}{\eta(\tau)}$$

$$= \begin{cases} \exp\left\{\pi i\left(\dfrac{a+d}{12c} - \dfrac{1}{4}\operatorname{sgn} c - \operatorname{sgn} c\cdot s(a,c)\right)\right\} & \text{für } c \neq 0,\\ \exp\left\{\pi i\,\dfrac{2b}{24}\right\} & \text{für } c = 0,\ a = d = 1,\\ \exp\left\{-\pi i\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2b}{24}\right)\right\} & \text{für } c = 0,\ a = d = -1.\end{cases}$$

Hierin ist für die auftretende Quadratwurzel, der in (1. 7) getroffenen Normierung entsprechend, jeweils der Hauptwert zu nehmen, ferner ist allgemein der bequemeren Schreibung wegen $e^z = \exp z$ geschrieben. Führt man für die rechte Seite der Transformationsformel (4. 1) ein eigenes Zeichen

$$(4.2)\quad v(M) = v\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \exp\left\{\pi i\left(\dfrac{a+d}{12c} - \dfrac{1}{4}\operatorname{sgn} c - \operatorname{sgn} c \cdot s(a,c)\right)\right. & \text{für } c \neq 0, \\ \exp\left\{\pi i\,\dfrac{2b}{24}\right\} & \text{für } c = 0,\ a = d = 1, \\ \exp\left\{-\pi i\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2b}{24}\right)\right\} & \text{für } c = 0,\ a = d = -1 \end{cases}$$

ein, so folgt, da die Diskriminante $\Delta(\mathfrak{w})$ bei der Modulgruppe invariant ist, daß die komplexen Einheitswurzeln $v(M)$ genauer 24-ste Einheitswurzeln sind. Für den trivialen Fall $c = 0$ ist dies evident, während diese Tatsache für den nicht-trivialen Fall $c \neq 0$ keineswegs auf der Hand liegt. Es entsteht also die Aufgabe, die nicht-trivialen Multiplikatoren $v(M)$ in Abhängigkeit von den Koeffizienten der unimodularen Matrix M explizit als 24-ste Einheitswurzeln darzustellen.

2. Bei der Lösung der genannten Aufgabe hat man zunächst eine Fallunterscheidung zu treffen, je nachdem der Koeffizient c von M eine ungerade oder eine gerade ganze Zahl ist.

Es sei c ungerade. Dann kann man die Darstellung (2. 13) oder zweckmäßiger (2. 14) der Dedekindschen Summen benutzen. So erhält man für den Exponenten des Multiplikators $v(M)$ in (4. 2) die auch für negatives c gültige Formel

$$\begin{aligned}(4.3)\quad k &= \frac{a+d}{12c} - \frac{1}{4}\operatorname{sgn} c - \operatorname{sgn} c \cdot s(a,c) \\ &= -\frac{c}{4} + \frac{c}{12}(a+d) - \operatorname{sgn} c\left(\frac{1}{3}\sum_{\varkappa=1}^{\frac{|c|-1}{2}}\left[\frac{2a}{|c|}\varkappa\right] + \frac{2}{3}\sum_{\varkappa=1}^{\frac{|c|-1}{2}}\left[\frac{d}{|c|}\varkappa\right]\right) \\ &= -\frac{c}{4} + \frac{c}{12}(a+d) - \operatorname{sgn} c \cdot \frac{2}{3}\sum_{\varkappa=1}^{\frac{|c|-1}{2}}\left(\left[\frac{d}{|c|}\varkappa\right] - \left[\frac{2a}{|c|}\varkappa\right]\right) \\ &\quad - \operatorname{sgn} c \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\frac{|c|-1}{2}}\left[\frac{2a}{|c|}\varkappa\right].\end{aligned}$$

Dabei ist in Hinblick auf $ad - bc = 1$ die ganze Zahl d als socius zu $a \bmod c$ gewählt worden. Die in dieser Darstellung auftretende letzte Summe

$$(4.4)\qquad m(a,c) = \sum_{\varkappa=1}^{\frac{|c|-1}{2}}\left[\frac{2a}{|c|}\varkappa\right]$$

hat nun eine wichtige arithmetische Bedeutung. Nach dem verallgemeinerten Gaußschen Lemma aus der Theorie der quadratischen Reste ist $m(a,c) \bmod 2$ gerade der Exponent des Legendre-Jacobischen Restsymbols für a nach c (Bachmann [1], Rademacher-Whiteman [21]):

$$(4.5)\qquad \left(\frac{a}{c}\right) = (-1)^{m(a,c)}.$$

So erhält man für k aus (4. 3) die additive Kongruenz

$$(4.6)\quad k \equiv -\frac{c}{4} + \frac{c}{12}(a+d) - \operatorname{sgn} c \cdot \frac{2}{3}\sum_{\varkappa=1}^{\frac{|c|-1}{2}}\left(\left[\frac{d}{|c|}\varkappa\right] - \left[\frac{2a}{|c|}\varkappa\right]\right) + m(a,c) \bmod^{+} 2.$$

Bei der Auswertung der hierin noch auftretenden Summe, auf die es offenbar $\bmod^{+} 3$ ankommt, hat man wiederum eine Fallunterscheidung zu treffen, je nachdem $c \not\equiv 0 \bmod 3$, also $c \equiv \pm 1 \bmod 3$, oder $c \equiv 0 \bmod 3$ ist.

Es sei $c \equiv \pm 1 \bmod 3$. Dann folgert man durch Vergleichung der beiden Darstellungen (2. 14) und (2. 15) für die ganze Zahl $12\,c \cdot s(a, c)$ und Betrachtung mod 3 unmittelbar die Teilbarkeitsaussage

$$(4.\,7) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\frac{|c|-1}{2}} \left(\left[\frac{d}{|c|} \varkappa \right] - \left[\frac{2a}{|c|} \varkappa \right] \right) \equiv 0 \bmod 3.$$

Somit vereinfacht sich in diesem Fall die Kongruenz (4. 6) zu

$$(4.\,8) \qquad k \equiv -\frac{c}{4} + \frac{c}{12}(a+d) + m(a, c) \bmod^{+} 2,$$

und man erhält unter Beachtung von (4. 5) für $v(M)$ in (4. 2) die explizite Darstellung als 24-ste Einheitswurzel

$$(4.\,9) \qquad v(M) = v\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{a}{c}\right) \exp\left\{ \frac{2\pi i}{24} \left((a+d)\,c - 3c\right) \right\}.$$

Es sei nun $c \equiv 0 \bmod 3$. Dann folgt aus der Gleichung $ad - bc = 1$ die Kongruenz $ad \equiv 1 \bmod 3$, so daß $a \equiv d \equiv \pm 1 \bmod 3$ ist. Zur Ermittlung des Kongruenzverhaltens mod 3 der fraglichen Summe in (4. 6) nehme man nun die Umformung in (3. 2) vor und denke sich hierin für $s(c, a)$ die Darstellung (2. 15) eingetragen. Multipliziert man jetzt den Exponenten k in (4. 3) mit $12a$, so erweist sich dieses Produkt $12a \cdot k$ offenbar als eine ganzrationale Zahl. Durch Vergleichung der beiden verschiedenen Darstellungen für die ganze Zahl $12a \cdot k$ und Betrachtung mod 3 erhält man so unmittelbar die Kongruenz

$$-\operatorname{sgn} c \cdot 8a \sum_{\varkappa=1}^{\frac{|c|-1}{2}} \left(\left[\frac{d}{|c|} \varkappa \right] - \left[\frac{2a}{|c|} \varkappa \right] \right) \equiv b \bmod 3,$$

und daraus ergibt sich für die fragliche Summe selbst der Kongruenzwert

$$(4.\,10) \qquad \operatorname{sgn} c \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\frac{|c|-1}{2}} \left(\left[\frac{d}{|c|} \varkappa \right] - \left[\frac{2a}{|c|} \varkappa \right] \right) \equiv ab \bmod 3.$$

Somit vereinfacht sich in diesem Fall die Kongruenz (4. 6) zu

$$(4.\,11) \qquad k \equiv -\frac{c}{4} + \frac{c}{12}(a+d) - \frac{2}{3}\,ab + m(a, c) \bmod^{+} 2,$$

und man erhält unter Beachtung von (4. 5) für $v(M)$ in (4. 2) die explizite Darstellung als 24-ste Einheitswurzel

$$(4.\,12) \qquad v(M) = v\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{a}{c}\right) \exp\left\{ \frac{2\pi i}{24} \left((a+d)\,c - 3c - 8ab\right) \right\}.$$

3. Es sei c gerade. Dann sind wegen $(a, c) = (d, c) = 1$ sicherlich a und d ungerade ganze Zahlen. Somit kann man mit der ursprünglichen Darstellung des Exponenten k in (4. 3) die Umformung (3. 2) vornehmen und hierin dann die Darstellung (2. 14) der Dedekindschen Summen eintragen. So erhält man auch

$$(4.\,13) \quad k = \frac{b-c}{12a} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\operatorname{sgn} a + \operatorname{sgn} a \cdot s(c, a) - \frac{(1+\operatorname{sgn} c)(1-\operatorname{sgn} a)}{4}$$

$$= \frac{a}{12}(b-c) + \frac{a-1}{4} + \frac{(1-\operatorname{sgn} a)(1-\operatorname{sgn} c)}{4} + \operatorname{sgn} a \cdot \frac{2}{3} \sum_{\lambda=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \left(\left[\frac{-b}{|a|} \lambda \right] - \left[\frac{2c}{|a|} \lambda \right] \right)$$

$$+ \operatorname{sgn} a \cdot \sum_{\lambda=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \left[\frac{2c}{|a|} \lambda \right].$$

Schwächt man diese Gleichung zur Kongruenz mod$^+$ 2 ab, so kann hierfür unter Beachtung von (4. 4), analog zu (4. 6),

$$(4.\,14)\qquad k \equiv \frac{a}{12}(b-c) + \frac{a-1}{4} + \frac{(1-\operatorname{sgn} a)(1-\operatorname{sgn} c)}{4} + \operatorname{sgn} a \cdot \frac{2}{3} \sum_{\lambda=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \left(\left[\frac{-b}{|a|} \lambda \right] - \left[\frac{2c}{|a|} \lambda \right] \right) + m(c, a) \bmod^+ 2$$

geschrieben werden.

Bei der Auswertung der hierin noch auftretenden Summe, auf die es offenbar mod$^+$ 3 ankommt, hat man genauso wie in Nr. 2 eine Fallunterscheidung zu treffen, je nachdem $a \not\equiv 0 \bmod 3$, also $a \equiv \pm 1 \bmod 3$, oder $a \equiv 0 \bmod 3$ ist.

Es sei $a \equiv \pm 1 \bmod 3$. Dann erhält man nach dem in Nr. 2 für diesen Fall dargelegten Verfahren die Teilbarkeitsaussage

$$(4.\,15)\qquad \sum_{\lambda=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \left(\left[\frac{-b}{|a|} \lambda \right] - \left[\frac{2c}{|a|} \lambda \right] \right) \equiv 0 \bmod 3.$$

Somit vereinfacht sich in diesem Fall die Kongruenz (4. 14) zu

$$(4.\,16)\qquad k \equiv \frac{a}{12}(b-c) + \frac{a-1}{4} + \frac{(1-\operatorname{sgn} a)(1-\operatorname{sgn} c)}{4} + m(c, a) \bmod^+ 2,$$

und man erhält unter Beachtung von (4. 5) für $v(M)$ in (4. 2) die explizite Darstellung als 24-ste Einheitswurzel

$$(4.\,17)\qquad v(M) = v\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} a}{2} \cdot \frac{1-\operatorname{sgn} c}{2}} \left(\frac{c}{a}\right) \exp\left\{ \frac{2\pi i}{24} \left((b-c)\,a + 3(a-1)\right) \right\}.$$

Es sei nun $a \equiv 0 \bmod 3$. Dann erhält man nach dem in Nr. 2 für diesen Fall dargelegten Verfahren für die fragliche Summe in (4. 14) den Kongruenzwert

$$(4.\,18)\qquad \operatorname{sgn} a \cdot \sum_{\lambda=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \left(\left[\frac{-b}{|a|} \lambda \right] - \left[\frac{2c}{|a|} \lambda \right] \right) \equiv bd \equiv -cd \bmod 3.$$

Somit vereinfacht sich in diesem Fall die Kongruenz (4. 14) zu

$$(4.\,19)\qquad k \equiv \frac{a}{12}(b-c) + \frac{a-1}{4} + \frac{2}{3}bd + \frac{(1-\operatorname{sgn} a)(1-\operatorname{sgn} c)}{4} + m(c, a) \bmod^+ 2,$$

und man erhält unter Beachtung von (4. 5) für $v(M)$ in (4. 2) die explizite Darstellung als 24-ste Einheitswurzel

$$(4.\,20)\qquad v(M) = v\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} a}{2} \cdot \frac{1-\operatorname{sgn} c}{2}} \left(\frac{c}{a}\right) \exp\left\{ \frac{2\pi i}{24} \left((b-c)\,a + 3(a-1) + 8bd\right) \right\}.$$

4. Die durch die verschiedenen Fallunterscheidungen bedingten verschiedenartigen Formeln für $v(M)$ in (4. 9), (4. 12) sowie (4. 17), (4. 20) lassen sich jeweils, wie man durch Betrachtung der Exponenten leicht erkennt, auch in der folgenden einheitlichen Gestalt schreiben (Molien [16]):

$$(4.\,21)\qquad v(M) = v\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{a}{c}\right) \exp\left\{\frac{2\pi i}{24}\left(ab + 2ac - 3c + cd(1-a^2)\right)\right\},$$

wenn c ungerade,

$$(4.\,22)\qquad v(M) = v\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} a}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{sgn} c}{2}} \left(\frac{c}{a}\right) \exp\left\{\frac{2\pi i}{24}\left(ab - ac + 3a - 3 + cd(1-a^2)\right)\right\},$$

wenn a ungerade.

Sind a und c beide ungerade, so gelten (4. 21) und (4. 22) gleichzeitig. Man erhält dann durch Vergleichung unmittelbar das *quadratische Reziprozitätsgesetz*

$$(4.\,23)\qquad \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}\cdot\frac{c-1}{2} + \frac{\operatorname{sgn} a - 1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sgn} c - 1}{2}}.$$

§ 5. Inversionsanzahlen und quadratisches Reziprozitätsgesetz.

1. Es seien m und n positive ganze, zueinander teilerfremde Zahlen. Dann bilden die Restklassen

$$(5.\,1)\qquad 1\cdot n,\ 2\cdot n,\ \ldots,\ (m-1)\cdot n \bmod m$$

eine Permutation der Restklassen

$$(5.\,2)\qquad 1,\quad 2\quad,\ \ldots,\ m-1 \qquad \bmod m.$$

Es werde allgemein der *Charakter* $\left(\frac{n}{m}\right)$ der Permutation (5. 1) durch

$$(5.\,3)\qquad \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{I(n;\,m)}$$

erklärt, wo $I(n; m)$ die *Anzahl der Inversionen* in (5. 1) bedeutet. Dann gilt nach Lerch [11] (Bachmann [1]) für gerades m die Formel

$$(5.\,4)\qquad \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)},$$

und nach Zolotareff [25], Lerch [11] und Frobenius [5] (Bachmann [1]) stimmt das Permutationssymbol $\left(\frac{n}{m}\right)$ für ungerades m mit dem Legendre-Jacobischen Symbol aus der Theorie der quadratischen Reste überein. Dieser Zusammenhang wird sich hier aufs neue aus der formelmäßigen Darstellung für die Anzahl $I(n; m)$ ergeben.

Formel (5. 4) und das quadratische Reziprozitätsgesetz für zwei teilerfremde ungerade natürliche Zahlen m und n

$$(5.\,5)\qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}$$

folgen nun unmittelbar aus der *Reziprozitätsformel*[1])

$$(5.6)\qquad mI(m;n)+nI(n;m)=\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}(m+n-1)$$

zwischen den Inversionsanzahlen $I(m;n)$ und $I(n;m)$.

2. Zum Beweis von (5. 6) hat man zunächst natürlich an die inhaltliche Bedeutung von $I(n;m)$ und $I(m;n)$ anzuknüpfen. Durch Abzählen der Inversionen gelangt man so zu den Summenformeln

$$(5.7)\qquad \begin{cases} I(n;m)=\sum\limits_{\mu=1}^{m-1} I_\mu(n;m) \quad \text{mit} \quad I_1(n;m)=0, \\ I(m;n)=\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} I_\nu(m;n) \quad \text{mit} \quad I_1(m;n)=0. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet allgemein $I_\mu(n;m)$ $(1<\mu<m)$ die Anzahl der kleinsten positiven Reste $r_\varkappa$ von $\varkappa n$ mod m in der Reihe

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\mu-1} \qquad (1<\mu<m),$$

die größer als r_μ sind. Analog ist $I_\nu(m;n)$ erklärt.

Diese Anzahlen $I_\mu(n;m)$ lassen sich nun leicht formelmäßig darstellen. Dazu werde angesetzt

$$(5.8)\qquad \begin{cases} \varkappa n = g_\varkappa m + r_\varkappa \quad \text{mit} \quad g_\varkappa=\left[\frac{\varkappa n}{m}\right], \quad 0<r_\varkappa=\varkappa n-\left[\frac{\varkappa n}{m}\right]m<m \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varkappa=1,2,\ldots,\mu-1; \\ \mu n = g_\mu m + r_\mu \quad \text{mit} \quad g_\mu=\left[\frac{\mu n}{m}\right], \quad 0<r_\mu=\mu n-\left[\frac{\mu n}{m}\right]m<m. \end{cases}$$

Es ist dann

1. $$r_\varkappa>r_\mu \longleftrightarrow \varkappa n-\left[\frac{\varkappa n}{m}\right]m>\mu n-\left[\frac{\mu n}{m}\right]m$$
$$\longleftrightarrow \left[\frac{\mu n}{m}\right]-\left[\frac{\varkappa n}{m}\right]>\frac{(\mu-\varkappa)n}{m}>\left[\frac{(\mu-\varkappa)n}{m}\right]\geqq 0;$$

2. $$r_\varkappa<r_\mu \longleftrightarrow \varkappa n-\left[\frac{\varkappa n}{m}\right]m<\mu n-\left[\frac{\mu n}{m}\right]m$$
$$\longleftrightarrow \left[\frac{\mu n}{m}\right]-\left[\frac{\varkappa n}{m}\right]<\frac{(\mu-\varkappa)n}{m}<\left[\frac{(\mu-\varkappa)n}{m}\right]+1.$$

Nun gilt allgemein die Alternative

$$(5.9)\qquad [\alpha]-[\beta]=\begin{Bmatrix}[\alpha-\beta]+1 \text{ oder} \\ [\alpha-\beta]+0\end{Bmatrix}, \text{ d. h. } \begin{Bmatrix}[\alpha]-[\beta]-[\alpha-\beta]=1 \text{ oder} \\ [\alpha]-[\beta]-[\alpha-\beta]=0\end{Bmatrix}.$$

Danach liefert im Fall 1 die Differenz

$$1'.\qquad \left[\frac{\mu n}{m}\right]-\left[\frac{\varkappa n}{m}\right]-\left[\frac{(\mu-\varkappa)n}{m}\right]=1 \text{ den Beitrag 1 zu } I_\mu(n;m),$$

dagegen im Fall 2 die Differenz

$$2'.\qquad \left[\frac{\mu n}{m}\right]-\left[\frac{\varkappa n}{m}\right]-\left[\frac{(\mu-\varkappa)n}{m}\right]=0 \text{ den Beitrag 0 zu } I_\mu(n;m).$$

Aus 1′ und 2′ zusammen folgt damit die Formel

$$I_\mu(n;m)=\sum_{\varkappa=1}^{\mu-1}\left(\left[\frac{\mu n}{m}\right]-\left[\frac{\varkappa n}{m}\right]-\left[\frac{(\mu-\varkappa)n}{m}\right]\right),$$

[1]) Nach schriftlicher Mitteilung von *H. Salié* an den Verfasser.

und daraus erhält man durch Addition

$$I(n;m) = \sum_{\mu=1}^{m-1} I_\mu(n;m) = \sum_{\mu=1}^{m-1}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\mu-1}\left(\left[\frac{\mu n}{m}\right] - \left[\frac{\varkappa n}{m}\right] - \left[\frac{(\mu-\varkappa)\,n}{m}\right]\right)\right)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m-1}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\mu}\left(\left[\frac{\mu n}{m}\right] - \left[\frac{\varkappa n}{m}\right] - \left[\frac{(\mu-\varkappa)\,n}{m}\right]\right)\right)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m-1} \mu\left[\frac{\mu n}{m}\right] - 2\sum_{\mu=1}^{m-1}\sum_{\varkappa=1}^{\mu}\left[\frac{\varkappa n}{m}\right] + \sum_{\mu=1}^{m-1}\left[\frac{\mu n}{m}\right],$$

wobei die letzte Summe gerade bewirkt, daß die zunächst zweimal subtrahierte Summe für $\varkappa = \mu$ nur einmal in Abzug zu bringen ist, wie es sein muß. Führt man in der Doppelsumme die Summation nach $\varkappa$ aus, so wird weiter

$$I(n;m) = \sum_{\mu=1}^{m-1} \mu\left[\frac{\mu n}{m}\right] - 2\sum_{\mu=1}^{m-1}(m-\mu)\left[\frac{\mu n}{m}\right] + \sum_{\mu=1}^{m-1}\left[\frac{\mu n}{m}\right].$$

Somit ergibt sich die Endformel

$$I(n;m) = 3\sum_{\mu=1}^{m-1} \mu\left[\frac{\mu n}{m}\right] - (2m-1)\sum_{\mu=1}^{m-1}\left[\frac{\mu n}{m}\right]. \tag{5. 10}$$

Analog ist

$$I(m;n) = 3\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\left[\frac{\nu m}{n}\right] - (2n-1)\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\frac{\nu m}{n}\right].$$

Danach nimmt die linke Seite der zu beweisenden Reziprozitätsformel (5. 6) die folgende Gestalt an:

$$mI(m;n) + nI(n;m) = 3\left(m\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\left[\frac{\nu m}{n}\right] + n\sum_{\mu=1}^{m-1} \mu\left[\frac{\mu n}{m}\right]\right) \tag{5. 11}$$

$$-(2n-1)\,m\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\frac{\nu m}{n}\right] - (2m-1)\,n\sum_{\mu=1}^{m-1}\left[\frac{\mu n}{m}\right].$$

In dem ersten Bestandteil auf der rechten Seite erkennt man gerade die linke Seite der früheren Reziprozitätsformel (2. 23). Der zweite Bestandteil läßt sich jeweils geschlossen auswerten. Es bestehen die Gaußschen Formeln

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\frac{\nu m}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2}, \quad \sum_{\mu=1}^{m-1}\left[\frac{\mu n}{m}\right] = \frac{(n-1)(m-1)}{2} \quad \text{für } (m,n)=1, \tag{5. 12}$$

die einfach aus

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} P_1\left(\frac{\nu m}{n}\right) = \sum_{\nu=1}^{n-1} P_1\left(-\frac{\nu m}{n}\right) = -\sum_{\nu=1}^{n-1} P_1\left(\frac{\nu m}{n}\right), \text{ d. h. } \sum_{\nu=1}^{n-1} P_1\left(\frac{\nu m}{n}\right) = 0 \tag{5. 13}$$

sowie

$$\sum_{\mu=1}^{m-1} P_1\left(\frac{\mu n}{m}\right) = 0$$

unter Beachtung von (1. 10) durch leichte Rechnung folgen. Trägt man daher die expliziten Werte für die Formeln in (2. 23) sowie (5. 12) auf der rechten Seite von (5. 11) ein, so erhält man

$$mI(m;n) + nI(n;m) = \frac{1}{4}(m-1)(n-1)(8mn-m-n-1) \tag{5. 14}$$

$$-(2n-1)\,m\cdot\frac{(m-1)(n-1)}{2} - (2m-1)\,n\cdot\frac{(n-1)(m-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(m-1)(n-1)(8mn-m-n-1-4mn+2m-4mn+2n)$$

$$= \frac{1}{4}(m-1)(n-1)(m+n-1),$$

und dies ist gerade die rechte Seite der zu beweisenden Reziprozitätsformel (5. 6).

Man kann die Reziprozität (5. 6) auch auf negative m bzw. n ausdehnen. Zunächst ist offenbar der inhaltlichen Bedeutung nach

$$I(n; -m) = I(n; m). \tag{5. 15}$$

Ferner sind in (5. 1) auch negative Multiplikatoren n zulässig. Ersichtlich ist

$$I(-n; m) + I(n; m) = \frac{(|m|-1)(|m|-2)}{2}, \tag{5. 16}$$

da die Summe links die größtmögliche Anzahl von Inversionen bei einer Permutation der Restklassen in (5. 2), nämlich $\binom{|m|-1}{2}$ angibt.

Vermöge (5. 15) und insbesondere (5. 16) erhält man dann nach leichter Rechnung die allgemeingültige, (5. 6) als Spezialfall umfassende *allgemeine Reziprozitätsformel*

$$\begin{aligned} &m I(m; n) + n I(n; m) \\ &= \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} (m+n-1) + 3\,|mn| \cdot \frac{1-\operatorname{sgn} m}{2} \cdot \frac{1-\operatorname{sgn} n}{2} \end{aligned} \tag{5. 17}$$

zwischen den Inversionsanzahlen $I(m; n)$ und $I(n; m)$ zu einem ganzzahligen, teilerfremden Zahlenpaar m, n. Beim Vergleich der beiden Formeln (2. 22) und (5. 17) drängt sich, auch ohne vorherige Kenntnis des inzwischen rechnerisch aufgedeckten Zusammenhangs, schon die Vermutung auf, daß Dedekindsche Summen und Inversionsanzahlen von Permutationen des Typus (5. 1) in einem engen Zusammenhang miteinander stehen müssen. In der Tat ist jetzt nach (2. 15), (5. 10) allgemein

$$I(m; n) = \frac{1}{2}\binom{|n|-1}{2} - 3\,|n| \cdot s(m, n) = 3\,|n|\,(s(1, n) - s(m, n)). \tag{5. 18}$$

3. Für den Fall zweier ungerader, teilerfremder ganzer Zahlen m und n erhält man jetzt aus der allgemeinen Reziprozitätsformel (5. 17) das *allgemeine Reziprozitätsgesetz für den Permutationscharakter* in (5. 3)

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{I(m;n)+I(n;m)} = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} + \frac{\operatorname{sgn} m-1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sgn} n-1}{2}}. \tag{5. 19}$$

Ebenso lassen sich die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz (5. 19) aus (5. 17) folgern. Ist $m = -1$, n ungerade, so erhält man wegen $I(n; -1) = 0$ unmittelbar den *ersten Ergänzungssatz*

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{\operatorname{sgn} n-1}{2}}. \tag{5. 20}$$

Ist $m = 2$ und dann n ungerade, so erhält man, was auch leicht unmittelbar aus der Definition folgt, wegen $I(n; 2) = 0$ aus (5. 17) den expliziten Wert $I(2; n) = \frac{n^2-1}{8}$. Damit ergibt sich der *zweite Ergänzungssatz*

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}. \tag{5. 21}$$

Es fehlt lediglich noch der Nachweis, daß das eingangs in Nr. 1 eingeführte Permutationssymbol mit dem ebenso bezeichneten Legendre-Jacobischen Symbol aus der Theorie der quadratischen Reste übereinstimmt, wenn der Nenner des Symbols eine ungerade ganze Zahl ist. In diesem Fall erhält man nun auf Grund des Zusammenhangs (5. 18) und der Formel (2. 14) für die Inversionsanzahl $I(m; n)$ die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} &I(m; n) \\ &= -\frac{1}{2}(n^2-1) + \frac{n^2-1}{4}(m+m') - |n| \sum_{\varkappa=1}^{\frac{|n|-1}{2}} \left[\frac{2m}{|n|}\varkappa\right] - 2\,|n| \sum_{\varkappa=1}^{\frac{|n|-1}{2}} \left[\frac{m'}{|n|}\varkappa\right]. \end{aligned} \tag{5. 22}$$

Betrachtet man diese Gleichung mod 2, so wird, da n ungerade angenommen ist,

$$(5.\,23)\qquad I(m;n) \equiv \sum_{\varkappa=1}^{\frac{|n|-1}{2}} \left[\frac{2m}{|n|}\varkappa\right] \bmod 2,$$

und durch diese Kongruenz ist nach (4. 4), (4. 5) gerade $I(m;n)$ als Exponent des Legendre-Jacobischen Restsymbols für m nach n gekennzeichnet. Damit ist die fragliche Identität der beiden Definitionen als zutreffend nachgewiesen.

§ 6. Ringklasseninvarianten mod fp_∞ über einem reell-quadratischen Zahlkörper.

1. Es sei Ω ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d_\Omega > 0$, ferner f eine natürliche Zahl und Ω_f der *Zahlring* mod f *in* Ω mit der Diskriminante $D_f = d_\Omega f^2$. Definitionsgemäß besteht Ω_f aus allen denjenigen für f ganzen Zahlen aus Ω, deren Kongruenzwert mod f rational ist. Es bezeichne weiter Ω_{fp_∞} die Gesamtheit aller Zahlen aus Ω_f mit positiver Norm; dabei ist p_∞ das Symbol für die unendliche Primstelle des rationalen Zahlkörpers. Die Gruppe der zu f primen Zahlen aus Ω_{fp_∞} bildet die Hauptklasse einer Einteilung aller zu f primen Divisoren von Ω. Diese *Hauptringklasse* mod fp_∞ besteht dann also aus allen (zu f primen) Hauptdivisoren (α) mit der Eigenschaft

$$(6.\,1)\qquad \alpha \equiv r \bmod fp_\infty;\quad (r \text{ rational}),$$

bei geeigneter Normierung von α unter Assoziierten, und die Divisorenklassen nach ihr bilden die *Ringklassen* mod fp_∞.

2. Es sei $\mathfrak{k}$ eine feste Ringklasse mod fp_∞, dazu der Divisor $\mathfrak{c}$ irgendein Vertreter aus der reziproken Ringklasse $\mathfrak{k}^{-1}$. Es bezeichne ferner v mod p_∞ den zur Klasseneinteilung gehörigen Vorzeichencharakter, explizit gegeben durch $v(\alpha) = \operatorname{sgn} N(\alpha)$ für Zahlen α aus Ω. Dann ist die *L-Funktion der Ringklasse* $\mathfrak{k}$ mod fp_∞ durch die für $\Re(s) > 1$ absolutkonvergente Dirichletsche Reihe

$$(6.\,2)\qquad L^*(s \mid \mathfrak{k}) = L^*(s \mid \mathfrak{c}, v) = \mathfrak{N}(\mathfrak{c})^s \sum_{\substack{\gamma \equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c} \\ \gamma \text{ in } \Omega_f \\ (\gamma, f) = 1}}^{*} \frac{\operatorname{sgn} N(\gamma)}{\mathfrak{N}(\gamma)^s}$$

invariant definiert, wo $\mathfrak{N}$ und N die Divisornorm und die Zahlnorm in Ω bezeichnen. Dabei deutet der Stern am Summenzeichen an, daß die Summation nur über ein volles System nicht durch Einheiten aus Ω_{fp_∞} assoziierter Zahlen $\gamma \neq 0$ mit den angegebenen Eigenschaften zu erstrecken ist. Für die Anwendungen solcher L-Funktionen bei der Berechnung der Klassenzahl gewisser algebraischer Zahlkörper kommt es auf die einschränkende Summationsbedingung $(\gamma, f) = 1$ nicht an. Hier tritt dann an die Stelle von (6. 2) die invariante Klassenfunktion

$$(6.\,3)\qquad L(s \mid \mathfrak{k}) = L(s \mid \mathfrak{c}, v) = \mathfrak{N}(\mathfrak{c})^s \sum_{\substack{\gamma \equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c} \\ \gamma \text{ in } \Omega_f}}^{*} \frac{\operatorname{sgn} N(\gamma)}{\mathfrak{N}(\gamma)^s},$$

die als die *L-Funktion der Ringklasse* $\mathfrak{k}$ mod fp_∞ *im erweiterten Sinne* bezeichnet werde (Meyer [15]).

Man führe nun zunächst eine Basis für das Ideal $(\mathfrak{c})_f$ der Vielfachen von $\mathfrak{c}$ im Ring mod f von Ω ein. Ist etwa $(\mathfrak{c})_f = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$, so gilt für die bis auf das Vorzeichen durch $\mathfrak{c}$ eindeutig bestimmte Basisdeterminante

$$(6.\,4)\qquad \delta(\mathfrak{c}_f) = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_1^\tau \\ \gamma_2 & \gamma_2^\tau \end{vmatrix} = \mathfrak{N}(\mathfrak{c})\,\delta_f \text{ mit } \delta_f^2 = D_f;$$

dabei bedeutet τ den nicht-identischen Automorphismus des reell-quadratischen Zahlkörpers Ω. Durch die Zuordnung

$$\gamma \to \gamma(x) = \gamma x + \gamma^{\tau}(ix)^{-1} \text{ für } \gamma \text{ aus } (\mathfrak{c})_f$$

wird dann der zweigliedrige reelle Modul $(\mathfrak{c})_f$ für jedes feste reelle x isomorph auf den zweigliedrigen komplexen Modul $(\mathfrak{c}_f(x)) = \begin{pmatrix}\gamma_1(x)\\ \gamma_2(x)\end{pmatrix}$ abgebildet. Die Basisdeterminante

$$(6.5) \qquad \delta(\mathfrak{c}_f(x)) = \begin{vmatrix} \gamma_1(x) & \overline{\gamma_1(x)} \\ \gamma_2(x) & \overline{\gamma_2(x)} \end{vmatrix} = 2i \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_1^{\tau} \\ \gamma_2 & \gamma_2^{\tau} \end{vmatrix} = 2i\delta(\mathfrak{c}_f)$$

ist von x unabhängig und die Normierung von $\delta(\mathfrak{c}_f(x))$ ist durch diejenige von $\delta(\mathfrak{c}_f)$ eindeutig festgelegt. Ferner ist

$$\Re(\gamma(x)) = \gamma x, \quad \Im(\gamma(x)) = -\gamma^{\tau} x^{-1}$$

und für die komplexe Norm gilt

$$\mathfrak{N}(\gamma(x)) = \gamma^2 x^2 + \gamma^{\tau 2} x^{-2}.$$

Es sei nun $\varepsilon_f > 1$ die total-positive Grundeinheit von Ω_{fp_∞}. Dann besteht für die L-Funktion der Ringklasse $\mathfrak{k} \bmod fp_\infty$ (im erweiterten Sinne) in (6.3), in den eingeführten Bezeichnungen, die fundamentale invariante Heckesche Integraldarstellung (Meyer [15])

$$(6.6) \quad L(s \mid \mathfrak{k}) = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2} \cdot \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{c})^{s-1}}{|\delta_f|} \Im \int_1^{\varepsilon_f} \left(\sum_{\gamma(x) \equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c}_f(x)}' \frac{|\delta(\mathfrak{c}_f(x))| \cdot \gamma(x)^2}{\mathfrak{N}(\gamma(x))^{s+1}} \right) d \log x.$$

Schreibt man für die Basis des Ringideals $(\mathfrak{c})_f$ eine bestimmte Normierung, etwa daß $\delta(\mathfrak{c}_f) > 0$ ausfällt, vor, so bedeutet dies nach (6.5) für den zugeordneten komplexen Modul $(\mathfrak{c}_f(x))$, daß seine Basisdeterminante $\delta(\mathfrak{c}_f(x))$ oder auch der Basisquotient $\tau(x) = \dfrac{\gamma_1(x)}{\gamma_2(x)}$ einen positiven Imaginärteil haben soll. Bei dieser Normierung erhält man dann durch Anwendung des Poissonschen Summationsverfahrens für den Integranden in (6.6) die Entwicklung (Meyer [15])

$$(6.7) \quad \sum_{\gamma(x) \equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c}_f(x)}' \frac{|\delta(\mathfrak{c}_f(x))| \cdot \gamma(x)^2}{\mathfrak{N}(\gamma(x))^{s+1}} = \frac{2\pi^2}{3} \Im(\tau(x)) \frac{\gamma_2(x)}{\overline{\gamma_2(x)}} - 2\pi \frac{\gamma_2(x)}{\overline{\gamma_2(x)}}$$
$$+ 8\pi i \Im(\tau(x)) \frac{\gamma_2(x)}{\overline{\gamma_2(x)}} \cdot \frac{d}{d\tau(x)} \log \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi i m \overline{\tau(x)}}) + O(s-1).$$

Es zeigt sich, daß dieser Ausdruck logarithmisch nach x integrierbar ist. Die Ausführung der Integration liefert dann für die Funktion $L(s \mid \mathfrak{k})$ in (6.6) die folgende Grenzformel in nicht-invarianter, inhomogener Gestalt:

$$(6.8) \quad L(s \mid \mathfrak{k}) = \frac{2\pi}{\sqrt{D_f}} \Im \left[\log \frac{e^{\frac{2\pi i \tau(x)}{24}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m \tau(x)})}{\gamma_2(x)} \right]_{x=1}^{x=\varepsilon_f} + O(s-1),$$

und hieraus erhält man sofort unter Beachtung von (1.3) die für beliebige Basen $\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$ des Ringideals $(\mathfrak{c})_f$ gültige Grenzformel in invarianter, homogener Gestalt

$$(6.9) \qquad L(s \mid \mathfrak{k}) = \frac{2\pi}{\sqrt{D_f}} \Im \left[\log \sqrt[24]{\Delta\left(\begin{smallmatrix}\gamma_1(x)\\ \gamma_2(x)\end{smallmatrix}\right)} \right]_{x=1}^{x=\varepsilon_f} + O(s-1).$$

Hierin hängen nun die Argumentwerte für die obere und die untere Integrationsgrenze durch eine Modulsubstitution M der Determinante $+1$ zusammen:

$$\begin{pmatrix}\gamma_1(\varepsilon_f)\\ \gamma_2(\varepsilon_f)\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\gamma_1(1)\\ \gamma_2(1)\end{pmatrix}.$$

Die ganzzahligen Koeffizienten der unimodularen Matrix $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ bestimmen sich dabei aus der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\varepsilon_f & \gamma_1^\tau\varepsilon_f^\tau\\ \gamma_2\varepsilon_f & \gamma_2^\tau\varepsilon_f^\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_1^\tau\\ \gamma_2 & \gamma_2^\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_f & 0\\ 0 & \varepsilon_f^\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_1^\tau\\ \gamma_2 & \gamma_2^\tau\end{pmatrix}$$

$$\text{mit } |M| = \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = N(\varepsilon_f) = +1$$

und haben die expliziten Werte

$$(6.\,10)\qquad \begin{cases} a = S\left(\dfrac{\gamma_1\gamma_2^\tau\varepsilon_f}{\delta(\mathfrak{c}_f)}\right), & b = S\left(\dfrac{\gamma_1\gamma_1^\tau\varepsilon_f^\tau}{\delta(\mathfrak{c}_f)}\right),\\ c = S\left(\dfrac{\gamma_2\gamma_2^\tau\varepsilon_f}{\delta(\mathfrak{c}_f)}\right), & d = S\left(\dfrac{\gamma_1\gamma_2^\tau\varepsilon_f^\tau}{\delta(\mathfrak{c}_f)}\right); \end{cases}$$

dabei bedeutet das Zeichen S die Spurbildung in Ω.

Führt man schließlich statt des mit dem Ringideal $(\mathfrak{c})_f = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$ gebildeten Moduls $(\mathfrak{c}_f(x)) = \begin{pmatrix}\gamma_1(x)\\ \gamma_2(x)\end{pmatrix}$ irgendeinen zweigliedrigen, nur der Bedingung

$$\operatorname{sgn}\frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i} = \operatorname{sgn}\delta(\mathfrak{c}_f)$$

unterworfenen komplexen Modul $\mathfrak{w} = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ ein, so erhält man aus (6. 9) nunmehr die sogenannte *implizite Kroneckersche Grenzformel für die L-Funktion der Ringklasse* $\mathfrak{k}$ mod fp_∞ (*im erweiterten Sinne*) (Meyer [15])

$$(6.\,11)\qquad L(s\,|\,\mathfrak{k}) = \frac{2\pi}{\sqrt{D_f}}\,\Im\left(\log\frac{\sqrt[24]{\Delta\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}}{\sqrt[24]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}}\right) + O(s-1) \quad\text{mit}\quad \operatorname{sgn}\frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i} = \operatorname{sgn}\delta(\mathfrak{c}_f).$$

Nach (1. 8) ergibt sich hieraus dann weiter die *explizite Kroneckersche Grenzformel für die L-Funktion der Ringklasse* $\mathfrak{k}$ mod fp_∞ (*im erweiterten Sinne*) *in einem reell-quadratischen Zahlkörper* (Meyer [15])

$$(6.\,12)\qquad L(s\,|\,\mathfrak{k}) = -\frac{2\pi^2}{\sqrt{D_f}}\operatorname{sgn}\delta(\mathfrak{c}_f)\left(-\frac{a+d}{12c} + \frac{1}{4}\operatorname{sgn}c + \operatorname{sgn}c\cdot s(a,c)\right) + O(s-1).$$

Hierin haben die Koeffizienten der unimodularen Matrix $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ die in (6. 10) bezeichneten expliziten Werte. Dabei ist zu beachten, daß der Koeffizient c wirklich von Null verschieden ist, da die Ringeinheit ε_f eine echte reell-quadratische Irrationalität ist.

Setzt man nun abkürzend

$$(6.\,13)\qquad \Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c}) = \Psi(M) = \Psi\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \operatorname{sgn}\delta(\mathfrak{c}_f)\left(-\frac{a+d}{12c} + \frac{1}{4}\operatorname{sgn}c + \operatorname{sgn}c\cdot s(a,c)\right),$$

so sind diese in der Grenzformel (6. 12) auftretenden rationalen Zahlen $\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c})$ *Ringklasseninvarianten* mod fp_∞ der durch die Repräsentanten $\mathfrak{c}$ vertretenen Ringklassen mod fp_∞. Im einzelnen gilt:

1. Der Wert $\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c})$ hängt nur vom Ringideal $(\mathfrak{c})_f$, nicht aber von einer speziellen Basis des Ringideals ab.
2. Der Wert $\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c})$ hängt nicht von der Auswahl des Vertreters $\mathfrak{c}$ aus der Ringklasse $\mathfrak{k}^{-1}$ ab.
3. Der Wert $\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c})$ ist nur von den Paaren konjugierter Ringklassen $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}^\tau = \mathfrak{k}^{-1}$ abhängig, d. h. es gilt $\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c}) = \Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c}^\tau)$.

   Diesen Invarianzeigenschaften der Zahlen $\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c})$ tritt noch die folgende Kovarianzeigenschaft zur Seite:
4. Ersetzt man ε_f durch ε_f^k, so gilt $\Psi_1^{\varepsilon_f^k}(\mathfrak{c}) = k \cdot \Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c})$, und es ist also der Wert $\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c})$ durch den Wert $\frac{1}{k}\Psi_1^{\varepsilon_f^k}(\mathfrak{c})$ zu ersetzen.

Diese Invarianz- und Kovarianzeigenschaften der Zahlen $\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c})$ sind zufolge dem Auftreten in der Kroneckerschen Grenzformel (6. 12) und nach der Herleitung dieser Grenzformel aus den invarianten Definitionsgleichungen (6. 3) und (6. 6) für die Klassenfunktion $L(s \mid \mathfrak{k})$ ohne weiteres klar. Man kann daher in Abhängigkeit von der Ringklasse $\mathfrak{k}^{-1}$ oder auch $\mathfrak{k}$ mod fp_∞ einfach

$$\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{k}^{-1}) = \Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{k}) = \Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c}) \quad \text{für } \mathfrak{c} \text{ aus } \mathfrak{k}^{-1} \tag{6. 14}$$

schreiben, und damit nimmt die Kroneckersche Grenzformel (6. 12) die folgende invariante Gestalt an:

$$L(s \mid \mathfrak{k}) = -\frac{2\pi^2}{\sqrt{D_f}} \cdot \Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{k}) + O(s-1). \tag{6. 15}$$

Man kann nun mit Hecke [8] die Aufgabe stellen, die genannten Eigenschaften der elementar-arithmetischen Ausdrücke $\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c})$, ohne Berufung auf die funktionentheoretische Herleitung, an diesen Rechenausdrücken selbst nachzuweisen. Während dieser direkte Nachweis für die Invarianzeigenschaften 2 und 3 auf Grund der in die Formel eingehenden Definitionen beinahe auf der Hand liegt oder nur eine einfache Rechnung erfordert, sind die Eigenschaften 1 und 4 keineswegs unmittelbar einsichtig. Vielmehr hat man hier die früher hergeleiteten arithmetischen Eigenschaften der Dedekindschen Summen, insbesondere das Reziprozitätsgesetz für diese Summen und die Kompositionsregel für die Rademachersche Matrixfunktion $\Phi(M)$ beim Beweis heranzuziehen.

3. Man setze abkürzend

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1^\tau \\ \gamma_2 & \gamma_2^\tau \end{pmatrix}, \quad \mathsf{E}_f = \begin{pmatrix} \varepsilon_f & 0 \\ 0 & \varepsilon_f^\tau \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dann ist entstehungsgemäß

$$\Gamma \mathsf{E}_f = M\Gamma,$$

und man hat also die bei festem E_f wesentlich von Γ abhängige Darstellung

$$M = \Gamma \mathsf{E}_f \Gamma^{-1}. \tag{6. 16}$$

Nimmt man nun einen Wechsel der Basis $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ des Ringideals $(\mathfrak{c})_f$ vor, so bedeutet dies für die Matrix Γ den Übergang $\Gamma \to \widetilde{\Gamma} = A\Gamma$ mit einer Matrix A der Determinante $|A| = \pm 1$ aus der weiteren Modulgruppe, und die Matrix M wird hierbei nach (6. 16) durch die Transformierte $\widetilde{M} = AMA^{-1}$ ersetzt. Die unter 1 behauptete Basisinvarianz

der Zahlen $\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c})$ läuft dann auf die Behauptung hinaus, daß, in der Bezeichnungsweise (6. 13), stets

$$\Psi(\widetilde{M}) = \Psi(M) \quad \text{für } \widetilde{M} = AMA^{-1} \text{ mit } |A| = \pm 1 \tag{6. 17}$$

gilt. Hierzu ist zu bemerken, daß zunächst wegen der Invarianz der Spur bei Transformation $S(\widetilde{M}) = S(M)$ ist. Hierfür gilt nun die Ungleichung

$$S(M) = a + d \geqq 3. \tag{6. 18}$$

Es ist nämlich gemäß (6. 16) auch $S(M) = S(\varepsilon_f) = \varepsilon_f + \varepsilon_f'$, und diese letzte Summe erfüllt die Ungleichung (6. 18), da ε_f total-positiv und zudem als Grundeinheit von $\Omega_{/p_\infty}$ eine echte reell-quadratische Irrationalität ist. Aus (6. 18) folgt übrigens aufs neue die Bemerkung, daß in allen Matrizen $\widetilde{M}$ die Elemente $\tilde{b}$ und $\tilde{c}$ stets von Null verschieden sind.

Das Vorgehen beim Beweis der Kompositionsregel für die Matrixfunktion $\Phi(M)$ in § 3, Nr. 2 lehrt, daß es auch hier beim Beweis der Invarianzregel (6. 17) genügt, diesen Nachweis lediglich für die speziellen Erzeugenden der Modulgruppe in der Rolle der unimodularen Matrix A zu erbringen. Im Fall der engeren Modulgruppe hat man nun die Matrizen $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ als Erzeugende, und im Fall der weiteren Modulgruppe kommt zu diesen noch die Matrix $T^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ als Erzeugende hinzu.

Es ist

$$\widetilde{M} = SMS^{-1} = \begin{pmatrix} a + c & b - a + d - c \\ c & d - c \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \Psi(\widetilde{M}) &= \operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}_f) \left(-\frac{a+d}{12c} + \frac{1}{4} \operatorname{sgn} c + \operatorname{sgn} c \cdot s(a+c, c) \right) \\ &= \operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}_f) \left(-\frac{a+d}{12c} + \frac{1}{4} \operatorname{sgn} c + \operatorname{sgn} c \cdot s(a, c) \right) = \Psi(M). \end{aligned}$$

Analog zeigt man, daß auch $\Psi(S^{-1}MS) = \Psi(M)$ ist.

Es ist

$$\widetilde{M} = TMT^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Damit wird zunächst

$$\Psi(\widetilde{M}) = \operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}_f) \left(\frac{a+d}{12b} - \frac{1}{4} \operatorname{sgn} b - \operatorname{sgn} b \cdot s(d, -b) \right).$$

Hierin ist

$$s(d, -b) = s(d, b) = s(a, b),$$

und nach der Reziprozitätsformel (1. 12) ist weiter

$$\operatorname{sgn} b \cdot s(a, b) = -\operatorname{sgn} a \cdot s(b, a) + \frac{a^2 + b^2 + 1}{12} - \frac{1}{4} \operatorname{sgn}(ab).$$

Hierin ist

$$s(b, a) = -s(c, a),$$

und wiederum nach (1. 12) ist weiter

$$\operatorname{sgn} a \cdot s(c, a) = -\operatorname{sgn} c \cdot s(a, c) + \frac{a^2 + c^2 + 1}{12} - \frac{1}{4} \operatorname{sgn}(ac).$$

Die Eintragung aller dieser Umrechnungsformeln ergibt endlich, unter Benutzung der Gleichung $ad - bc = 1$, für $\Psi(\widetilde{M})$ den Ausdruck

$$\Psi(\widetilde{M}) = \operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}_f)\left(-\frac{a+d}{12c} + \frac{1}{4}\left(\operatorname{sgn}(ac) + \operatorname{sgn}(ab) - \operatorname{sgn} b\right) + \operatorname{sgn} c \cdot s(a, c)\right).$$

Die hierin auftretenden Vorzeichen lassen sich einheitlich zusammenfassen; es ist nämlich in jedem Fall

$$\operatorname{sgn}(ac) + \operatorname{sgn}(ab) - \operatorname{sgn} b = \operatorname{sgn} c.$$

Für $a > 0$ ist das klar, ebenso für $a = 0$ und dann $b = -c = \pm 1$. Für $a < 0$ und $d > 0$ ist $bc < 0$, also $\operatorname{sgn} b = -\operatorname{sgn} c$, und die fragliche Beziehung ist ebenfalls richtig. Der noch denkbare Fall $a < 0$ und $d < 0$ schließlich kommt auf Grund der Bedingung (6. 18) nicht vor. Damit erhält man

$$\Psi(\widetilde{M}) = \operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}_f)\left(-\frac{a+d}{12c} + \frac{1}{4}\operatorname{sgn} c + \operatorname{sgn} c \cdot s(a, c)\right) = \Psi(M),$$

wie zu zeigen war. Wegen $T^{-1} = -T$ ist hiermit zugleich auch die Invarianzformel $\Psi(T^{-1}MT) = \Psi(M)$ bewiesen.

Im Fall der weiteren Modulgruppe hat man noch das Verhalten bei der Transformation mit der Erzeugenden T^* zu prüfen. Hierfür ist wegen $T^{*-1} = T^*$

$$\widetilde{M} = T^* M T^{*-1} = T^{*-1} M T^* = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\Psi(\widetilde{M}) = -\operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}_f)\left(-\frac{a+d}{12b} + \frac{1}{4}\operatorname{sgn} b + \operatorname{sgn} b \cdot s(d, b)\right),$$

und demnach stimmt dieser Fall mit dem vorher behandelten genau überein. Mit diesen Einzelfeststellungen ist nunmehr unter Berufung auf die Vorbemerkung auch der allgemeine Beweis für die Invarianzformel (6. 17) erbracht.

4. Der Beweis der Kovarianzregel in Nr. 1 stützt sich wesentlich auf die Kompositionsregel für die Matrixfunktion $\Phi(M)$. Zunächst besteht, in der Bezeichnungsweise (6. 13), der Zusammenhang

$$\operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}_f)\, \Psi(M) = \frac{1}{4}\operatorname{sgn} c - \frac{1}{12}\Phi(M). \tag{6. 19}$$

Nimmt man dann, lediglich zur Vereinfachung der Schreibweise, die Normierung $\operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}_f) = 1$ an, so erhält man aus (1. 16) oder (3. 3) unmittelbar die entsprechende Kompositionsregel für die Matrixfunktion $\Psi(M)$:

$$\Psi(M_3) = \Psi(M_1 M_2) = \Psi(M_1) + \Psi(M_2) - \frac{1}{4}\left(\operatorname{sgn} c_1 + \operatorname{sgn} c_2 - \operatorname{sgn} c_3 - \operatorname{sgn}(c_1 c_2 c_3)\right). \tag{6. 20}$$

Ersetzt man nun die total-positive Grundeinheit ε_f des Zahlrings Ω_f durch ihre k-te Potenz ε_f^k $(k \geqq 1)$, so wird hierbei nach (6. 16) die Matrix M ebenfalls durch ihre k-te Potenz ersetzt. Die unter 4 behauptete Kovarianz der Zahlen $\Psi_1^{\varepsilon_f}(\mathfrak{c})$ läuft dann auf die Behauptung hinaus, daß, in der obigen Bezeichnungsweise, stets

$$\Psi(M^k) = k \cdot \Psi(M) \quad \text{für } k \geqq 1 \tag{6. 21}$$

gilt.

Der Beweis dieser Regel erfolgt durch vollständige Induktion nach k. Für $k = 1$ ist nichts zu beweisen. Für $k = 2$ hat man, in leicht verständlicher Bezeichnungsweise, für die in (6. 20) auftretenden Koeffizienten die Relationen $c_M = c^{(1)} = c$, $c_{M^2} = c^{(2)} = (a+d)\,c$;

hiernach ist auf Grund von (6. 18) also $\operatorname{sgn} c^{(2)} = \operatorname{sgn} c^{(1)} = \operatorname{sgn} c$. Somit ist die Behauptung auch für den Fall $k = 2$ richtig. Im Sinne der Induktionsvoraussetzung sei nun schon die obige Regel für den Exponenten $k - 1 \geqq 2$ unter der zusätzlichen Annahme, daß dabei die Vorzeichenrelation $\operatorname{sgn} c^{(k-1)} = \operatorname{sgn} c$ besteht, als richtig anerkannt. Dann wird gemäß (6. 20)

$$\begin{aligned}\Psi(M^k) &= \Psi(M^{k-1}) + \Psi(M) - \frac{1}{4}\left(\operatorname{sgn} c^{(k-1)} + \operatorname{sgn} c - \operatorname{sgn} c^{(k)} - \operatorname{sgn}(c^{(k-1)} c c^{(k)})\right)\\ &= k \cdot \Psi(M) - \frac{1}{4}\left(2 \operatorname{sgn} c - 2 \operatorname{sgn} c^{(k)}\right),\end{aligned}$$

und es bleibt lediglich zu zeigen, daß auch $\operatorname{sgn} c^{(k)} = \operatorname{sgn} c$ ist.

Nun genügt die Matrix M ihrer charakteristischen Gleichung

$$M^2 - (a + d)\, M + I = 0. \tag{6. 22}$$

Daraus folgt durch Multiplikation die Matrizengleichung

$$M^k = (a + d)\, M^{k-1} - M^{k-2},$$

und hieraus erhält man speziell die Rekursionsformel

$$c^{(k)} = (a + d)\, c^{(k-1)} - c^{(k-2)}. \tag{6. 23}$$

Um zu zeigen, daß die fragliche Vorzeichengleichheit $\operatorname{sgn} c^{(k)} = \operatorname{sgn} c$ besteht, genügt es festzustellen, daß die Folge der Koeffizienten $c^{(k)}$ im engeren Sinne monoton ist.

Es sei etwa $c > 0$. Dann hat man nach (6. 18)

$$c^{(2)} = (a + d)\, c^{(1)} \geqq 3 c^{(1)} > c^{(1)} = c.$$

Ist schon $c^{(k-1)} > c^{(k-2)} \geqq c$ gezeigt, so folgt die Monotonie für $c^{(k)}$ aus

$$c^{(k)} = (a + d)\, c^{(k-1)} - c^{(k-2)} = (a + d - 1)\, c^{(k-1)} + (c^{(k-1)} - c^{(k-2)}) > 2 c^{(k-1)} > c^{(k-1)}.$$

Danach ist in der Tat $c^{(k)} > c$ und somit also $\operatorname{sgn} c^{(k)} = \operatorname{sgn} c$, wie behauptet. Analog schließt man im Fall $c < 0$ durch Umkehrung der Vorzeichen in der vorstehenden Schlußkette. Damit ist die Regel (6. 21) für den Fall, daß die Ringidealbasis von $(\mathfrak{c})_f$ zu $\operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}_f) = 1$ normiert ist, vollständig bewiesen. Der noch ausstehende Fall $\operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}) = -1$ erledigt sich einfach durch den Hinweis, daß dann in den benutzten Gleichungen und Ungleichungen lediglich überall der Faktor -1 anzubringen ist.

II. Allgemeine Dedekindsche Summen.

§ 7. Die Transformationsformel für die Funktionen $\log \sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}$ bei Modulsubstitutionen aus der Hauptkongruenzgruppe f-ter Stufe.

1. Die zum Gitter $\mathfrak{w} = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ gehörige Kleinsche σ^*-Funktion hängt mit der Weierstraßschen σ-Funktion durch die Beziehung

$$\sigma^*(u \mid \mathfrak{w}) = -e^{\frac{-uu^*}{2}}\, \sigma(u \mid \mathfrak{w}) \tag{7. 1}$$

$$\text{mit } u = u_1\omega_1 + u_2\omega_2, \quad u^* = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 \qquad (u_1, u_2 \text{ reell})$$

zusammen (Klein-Fricke [9], Fricke [4]). Dabei bezeichnen η_1, η_2 die zu einem primitiven Periodenpaar ω_1, ω_2 gehörigen Periodizitätsmoduln. Es sei die Normierung der Gitterbasis $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ so getroffen, daß der Basisquotient $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ einen Imaginärteil $\mathfrak{J}(\tau) > 0$ hat;

dies ist gleichbedeutend damit, daß $\operatorname{sgn} \frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i} = +1$ ausfällt, wenn $\delta(\mathfrak{w}) = \delta\binom{\omega_1}{\omega_2}$ die bis auf das Vorzeichen durch $\mathfrak{w}$ eindeutig bestimmte Determinante des Gitters bezeichnet. Aus der bekannten Entwicklung der σ-Funktion im Unendlichen erhält man dann die entsprechende Produktentwicklung für die σ^*-Funktion:

$$(7.2) \qquad \sigma^*\left(u \,\middle|\, \begin{smallmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{smallmatrix}\right)$$

$$= \frac{\omega_2}{2\pi i}\, e^{\pi i u_2(u_1-1)} e^{\pi i u_1(u_1-1)\tau} \frac{\prod\limits_{m=0}^{\infty}(1 - e^{2\pi i u_2} e^{2\pi i(m+u_1)\tau}) \prod\limits_{m=1}^{\infty}(1 - e^{-2\pi i u_2} e^{2\pi i(m-u_1)\tau})}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i m\tau})^2}.$$

Es sei nun $f \geqq 2$ eine feste natürliche Zahl, ferner $(g, h) \neq (0, 0)$ ein beliebiges Paar ganzer Zahlen, auf die es jeweils nur mod f ankommen wird. Durch diese Gegebenheiten ist dann vermöge

$$\tilde{\omega} = \frac{g\omega_1 + h\omega_2}{f} = \frac{1}{f}\,(g, h)\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$$

ein f-ter Teilpunkt $\tilde{\omega}$ in einem durch das Zahlenpaar (g, h) bestimmten Periodenparallelogramm festgelegt. Legt man das Grundintervall $0 \leqq g < f$, $0 \leqq h < f$ zugrunde, so gehört $\tilde{\omega}$ dem Fundamentalparallelogramm an.

Bei den vorgenommenen Normierungen gilt dann nach (7.2) für die Kleinschen σ^*-Teilwerte

$$\sigma_{gh}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = \sigma^*\left(\frac{1}{f}\,(g, h)\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\right), \quad 0 \leqq g < f, 0 \leqq h < f,$$

im Unendlichen die Produktentwicklung

$$(7.3) \qquad \sigma_{gh}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\omega_2}{2\pi i}\, e^{\frac{\pi i h(g-f)}{f^2}}\, e^{\frac{\pi i g(g-f)}{f^2}\tau} \cdot \frac{\prod\limits_{m=0}^{\infty}\left(1 - \zeta_f^h q^{\left(m+\frac{g}{f}\right)}\right) \prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1 - \zeta_f^{-h} q^{\left(m-\frac{g}{f}\right)}\right)}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}(1 - q^m)^2}.$$

Dabei bezeichnet

$$q = e^{2\pi i\tau} \text{ mit } |q| < 1$$

die Ortsuniformisierende im Unendlichen und $\zeta_f = e^{\frac{2\pi i}{f}}$ die normierte f-te Einheitswurzel. Diese $\sigma_{gh}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ sind als Modulformen der f-ten Stufe adjungiert, indem sie zwar gegenüber Modulsubstitutionen aus der Hauptkongruenzgruppe f-ter Stufe nicht invariant sind, jedoch dabei lediglich gewisse $(2f)$-te Einheitswurzeln annehmen, deren Ordnung sich im Fall eines ungeraden Teilungsgrades f sogar zu f erniedrigt (Klein-Fricke [9], Fricke [4]). Als Modulformen haben die $\sigma_{gh}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ offenbar die Dimension 1.

Es sei nun $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \bmod f$ mit $|M| = +1$ eine beliebige ganzzahlige unimodulare Matrix aus der Hauptkongruenzgruppe f-ter Stufe $\Gamma(f)$ und $M(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$

die zugeordnete linear-gebrochene, inhomogene Modulsubstitution in der Variablen τ. Dann läßt sich die Differenz

$$\log \sigma_{gh}\begin{pmatrix} a\omega_1 + b\omega_2 \\ c\omega_1 + d\omega_2 \end{pmatrix} - \log \sigma_{gh}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \log \frac{\sigma_{gh}\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}}$$

als in der oberen τ-Halbebene eindeutige, reguläre Funktion der einen komplexen Variablen τ erklären durch

$$(7.4)\quad \log \frac{\sigma_{gh}\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}} = \log(c\tau + d) + \frac{\pi i g(g-f)}{f^2}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} - \tau\right)$$
$$- \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{2\pi i h}{f}} e^{2\pi i\left(m+\frac{g}{f}\right)\tau}\right)^n \Big|_{\tau}^{M(\tau)} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(e^{-\frac{2\pi i h}{f}} e^{2\pi i\left(m-\frac{g}{f}\right)\tau}\right)^n \Big|_{\tau}^{M(\tau)}$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{2\pi i m n \tau}\Big|_{\tau}^{M(\tau)}.$$

Hierin bedeutet, wie in (1. 7), $\log(c\tau + d)$ den Hauptwert des Logarithmus. Ferner ist wie dort allgemein abkürzend $F(M(\tau)) - F(\tau) = F(\tau)\,|_{\tau}^{M(\tau)}$ gesetzt. Dann besteht im nicht-trivialen Fall $c \neq 0$ die gleich für beliebige $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ mit $\Im(\tau) \neq 0$ formulierte *Transformationsformel*[2]) (Meyer [15])

$$(7.5)\quad \log \frac{\sigma_{gh}\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}} = \operatorname{sgn}\frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i}\,\pi i\left(P_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d}{c} - 2\operatorname{sgn} c \cdot s_{gh}(a, c)\right.$$
$$\left. - \frac{a+d}{6c} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} c + 2\operatorname{sgn} c \cdot s(a, c)\right).$$

Hierin bezeichnet

$$(7.6)\qquad s_{gh}(a, c) = \sum_{\mu \bmod c}{}' P_1\left(\frac{a\mu}{c} + \frac{ag + ch}{fc}\right) P_1\left(\frac{\mu}{c} + \frac{g}{fc}\right)$$

die zum Parameterpaar (g, h) mod f gehörige, dem ganzzahligen, teilerfremden Argumentpaar a, c, mit $a \equiv 1$, $c \not\equiv 0 \bmod f$, zugeordnete *allgemeine Dedekindsche Summe.* Dabei deutet der Strich am Summenzeichen an, daß die Summation nur über solche μ mod c zu erstrecken ist, die jeweils echt-gebrochene Argumente in beiden Faktoren liefern. Dies ist nur für den Fall $g = 0$, $h \neq 0$ eine Einschränkung. Hier hat man zwei Ausnahmewerte für μ, nämlich $\mu \equiv 0$ und $\mu \equiv -\frac{c}{f}h \bmod c$[3]). Ferner bezeichnet $s(a, c)$ die bereits in (1. 9) erklärte spezielle Dedekindsche Summe. Sie ist in der Tat als Spezialfall in der Formel (7. 6) enthalten, indem man darin formal $g = h = 0$ annimmt. Schließlich bedeutet allgemein

$$(7.7)\qquad P_2(x) = R^2(x) - R(x) + \frac{1}{6} \quad \text{mit } R(x) = x - [x]$$

diejenige mod$^+$ 1 periodische stetige Funktion, die im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ mit dem zweiten Bernoullischen Polynom $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ übereinstimmt.

Im trivialen Fall $c = 0$ dagegen erhält man zunächst für $f > 2$ nur die Lösung $a = d = 1$, $b \equiv 0 \bmod f$ beliebig, für die Gleichung $ad - bc = 1$, mit der zugehörigen Matrix

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ aus } \Gamma(f),$$

---

[2]) Diese Transformationsformel findet sich implizit auch schon bei *Hecke* [8].

[3]) Man bemerkt jedoch, daß man die Summation auch über ein volles Restsystem μ mod c erstrecken kann, da die beiden Ausnahmewerte für μ sich gegenseitig annullierende Beiträge liefern.

und lediglich für $f = 2$ hat man noch die weitere Lösung $a = d = -1$, $b \equiv 0 \bmod f$ beliebig. Dieser letztere Fall soll im folgenden beiseite gelassen werden. Gegebenenfalls sind die diesem trivialen Ausnahmefall entsprechenden Transformationsformeln leicht zu ergänzen. Somit ergibt sich hier unmittelbar aus der Definitionsgleichung (7. 4) jeweils nur die eine *Transformationsformel*

$$(7.8)\qquad \log \frac{\sigma_{gh}\left(M_0\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}} = \operatorname{sgn} \frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i} \frac{\pi i g(g-f)}{f^2} b = \operatorname{sgn} \frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i} \frac{2\pi i g(g-f)}{2f} \frac{b}{f}.$$

Für funktionentheoretische und arithmetische Zwecke ist noch das Transformationsverhalten der Funktionen $\log\left(\sqrt[12]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}\,\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)$ bei Modulsubstitutionen M aus $\Gamma(f)$ von Wichtigkeit. Nach (1. 8) und (7. 5) besteht dann im nicht-trivialen Fall $c \neq 0$ die gleich für beliebige $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ mit $\Im(\tau) \neq 0$ formulierte *Transformationsformel*

$$(7.9)\qquad \log \frac{\sqrt[12]{\Delta\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}\,\sigma_{gh}\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sqrt[12]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}\,\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}} = \operatorname{sgn} \frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i} \pi i \left(P_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d}{c} - 2 \operatorname{sgn} c \cdot s_{gh}(a, c)\right).$$

Im trivialen Fall $c = 0$ dagegen erhält man nach (1. 11) und (7. 8) die *Transformationsformel*

$$(7.10)\qquad \log \frac{\sqrt[12]{\Delta\left(M_0\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}\,\sigma_{gh}\left(M_0\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sqrt[12]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}\,\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}} = \operatorname{sgn} \frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i} \pi i P_2\left(\frac{g}{f}\right) b.$$

2. Aus den Transformationsformeln (7. 5) und (7. 9) lassen sich tiefliegende arithmetische Folgerungen ziehen. Zunächst ist zu bemerken, daß die rechte Seite jener Formeln jeweils von dem komplexen Variablenpaar $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$, bis auf das durch $\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}$ bestimmte Vorzeichen, ganz unabhängig ist. Ist dann $T = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ die eine Erzeugende der Modulgruppe, so gilt nach dieser Bemerkung also für die linke Seite von (7. 9) auch

$$\log \frac{\sqrt[12]{\Delta\left(M\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)\right)}\,\sigma_{gh}\left(M\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)\right)}{\sqrt[12]{\Delta\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}\,\sigma_{gh}\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)} = \log \frac{\sqrt[12]{\Delta\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}\,\sigma_{gh}\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sqrt[12]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}\,\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}}.$$

Nun ist aber, wie sich weiter auf analytischem Wege zeigen läßt,

$$\log \frac{\sqrt[12]{\Delta\left(M\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)\right)}\,\sigma_{gh}\left(M\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)\right)}{\sqrt[12]{\Delta\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}\,\sigma_{gh}\left(T\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)} = \log \frac{\sqrt[12]{\Delta\left(T^{-1}MT\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}\,\sigma_{h,-g}\left(T^{-1}MT\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sqrt[12]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}\,\sigma_{h,-g}\binom{\omega_1}{\omega_2}}.$$

Hierin ist $T^{-1}MT = \begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$ wieder eine Matrix aus $\Gamma(f)$. Durch Vergleich der rechten Seiten der zugehörigen Transformationsformeln (7. 9) bzw. (7. 9) und (7. 10) erhält man unter Beachtung von $s_{h,-g}(d, -b) = s_{hg}(d, b)$ daraus dann die beiden Formeln

$$(7.11)\qquad \begin{aligned} &\operatorname{sgn} c \cdot s_{gh}(a, c) + \operatorname{sgn} b \cdot s_{hg}(d, b) = \frac{1}{2}\left(P_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d}{c} + P_2\left(\frac{h}{f}\right)\frac{a+d}{b}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } b \neq 0,\ c \neq 0, \\ &\operatorname{sgn} c \cdot s_{gh}(1, c) = \frac{1}{2}\left(P_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{2}{c} + P_2\left(\frac{h}{f}\right)c\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } b = 0,\ c \neq 0,\ a = d = 1. \end{aligned}$$

Die erstere Formel kann als das Analogon der Formel (1. 12) für die speziellen Dedekindschen Summen angesehen werden und sei daher kurz als die *Reziprozitätsformel für die allgemeinen Dedekindschen Summen* bezeichnet. Nach demselben analytischen Verfahren läßt sich auch mittels (7. 5) eine Reziprozitätsformel herleiten, die in unfertiger Gestalt folgendermaßen lautet:

$$(7.\,12)\qquad \operatorname{sgn} c\left(s_{gh}(a,c)-s(a,c)-\frac{1}{4}\right)+\operatorname{sgn} b\left(s_{hg}(d,b)-s(d,b)-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(P_2\left(\frac{g}{f}\right)-\frac{1}{6}\right)\frac{a+d}{c}+\left(P_2\left(\frac{h}{f}\right)-\frac{1}{6}\right)\frac{a+d}{b}\right)+\frac{(\operatorname{sgn} b+\operatorname{sgn} c)(\operatorname{sgn} d-1)}{4}.$$

Beide Formeln (7. 11) und (7. 12) sind insofern miteinander gleichbedeutend, als sie sich auf Grund von (1. 12) ineinander überführen lassen. Die Formel (7. 12) wird im weiteren Verlauf noch umgestaltet werden, und zwar dadurch, daß es gelingt, die allgemeinen Dedekindschen Summen auf die speziellen Dedekindschen Summen und gewisse einfacher gebaute Summen zurückzuführen.

Man führe nun die folgenden *Matrixfunktionen* ein:

$$(7.\,13)\quad \Phi^*_{gh}(M)=\Phi^*_{gh}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$
$$=\begin{cases}P_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d}{c}-2\operatorname{sgn} c\cdot s_{gh}(a,c)-\frac{a+d}{6c}+2\operatorname{sgn} c\cdot s(a,c) & \text{für } c\neq 0,\\ \frac{g(g-f)}{f}\,\frac{b}{f} & \text{für } c=0,\end{cases}$$

sowie

$$(7.\,14)\qquad \Phi_{gh}(M)=\Phi_{gh}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{cases}P_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d}{c}-2\operatorname{sgn} c\cdot s_{gh}(a,c) & \text{für } c\neq 0,\\ P_2\left(\frac{g}{f}\right)b & \text{für } c=0.\end{cases}$$

Beide Funktionen hängen nach (1. 13) einfach durch

$$(7.\,15)\qquad \Phi^*_{gh}(M)=\Phi_{gh}(M)-\frac{1}{6}\,\Phi(M)$$

zusammen.

Hiermit schreiben sich die Transformationsformeln (7. 5), (7. 8) sowie (7. 9), (7. 10) in der Gestalt

$$(7.\,16)\qquad \log\frac{\sigma_{gh}\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}}=\operatorname{sgn}\frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i}\,\pi i\left(\frac{1}{2}\operatorname{sgn} c+\Phi^*_{gh}(M)\right),$$

bzw.

$$(7.\,17)\qquad \log\frac{\sqrt[12]{\Delta\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}\,\sigma_{gh}\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sqrt[12]{\Delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}\,\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}}=\operatorname{sgn}\frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i}\,\pi i\,\Phi_{gh}(M).$$

Es seien jetzt $M_1=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$ zwei beliebige ganzzahlige unimodulare Matrizen aus $\Gamma(f)$, $M_3=\begin{pmatrix}a_3 & b_3\\ c_3 & b_3\end{pmatrix}=M_1M_2$ ihr Produkt. Dann folgert man nach dem Vorgehen von Rademacher [18] bei Hintereinanderausführung der entsprechenden Modulsubstitutionen aus den vorstehenden Transformationsformeln durch Vergleichung die folgenden *Kompositionsregeln für die Matrixfunktionen* $\Phi^*_{gh}(M)$ und $\Phi_{gh}(M)$:

$$\Phi^*_{gh}(M_3) = \Phi^*_{gh}(M_1) + \Phi^*_{gh}(M_2) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(c_1 c_2 c_3), \tag{7.18}$$

bzw.

$$\Phi_{gh}(M_3) = \Phi_{gh}(M_1) + \Phi_{gh}(M_2) + \operatorname{sgn}(c_1 c_2 c_3). \tag{7.19}$$

Die funktionentheoretischer Quelle entstammenden Formeln (7. 12), (7. 18) bzw. (7. 19) beinhalten Aussagen elementar-arithmetischer Natur, und es entsteht somit die Aufgabe, die Beweise hierfür auch auf rein-arithmetischem Wege zu erbringen.

§ 8. Reduktion allgemeiner Dedekindscher Summen auf spezielle Dedekindsche Summen und allgemeine Eisenstein-Sternsche Summen und independenter Beweis des Reziprozitätsgesetzes.

1. Die allgemeinen Dedekindschen Summen in (7. 6) haben einfache formale Eigenschaften. Da $P_1(-x) = -P_1(x)$ für nicht-ganzes x ist, hat man bezüglich des Parameterpaares (g, h) mod f unmittelbar die Symmetrieregel

$$s_{-g,\,-h}(a, c) = s_{gh}(a, c), \tag{8.1}$$

und durch Summationstransformation ergibt sich weiter die Vorzeichenregel

$$s_{g,\,-h}(a, c) = s_{-g,\,h}(a, c) = s_{gh}(d, c). \tag{8.2}$$

In analoger Weise erhält man bezüglich des Argumentpaares a, c die Antisymmetrieregel

$$s_{gh}(-a, -c) = -s_{gh}(a, c), \tag{8.3}$$

sowie die Vorzeichenregeln

$$\begin{aligned} s_{gh}(-a, c) &= -s_{g,\,-h}(a, c) = -s_{-g,\,h}(a, c) = -s_{gh}(d, c), \\ s_{gh}(a, -c) &= s_{g,\,-h}(a, c) = s_{-g,\,h}(a, c) = s_{gh}(d, c). \end{aligned} \tag{8.4}$$

2. Die allgemeinen Dedekindschen Summen gestatten weiterhin eine wichtige Reduktion auf die speziellen Dedekindschen Summen und gewisse andere einfachere Summen. Da die der Definition zugrunde liegende ganzzahlige unimodulare Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(f)$ mit $f \geqq 2$ angehört, sind danach die Zahlen

$$\begin{cases} a' = \dfrac{a-1}{f}, & b' = \dfrac{b}{f}, \\ c' = \dfrac{c}{f}, & d' = \dfrac{d-1}{f} \end{cases} \tag{8.5}$$

mit der ganzzahligen Determinante $a'd' - b'c' = \dfrac{2-a-d}{f^2}$

ebenfalls ganze Zahlen. Setzt man abkürzend, bei gleichzeitiger Betrachtung mod c, an

$$\begin{cases} k = ga' + hc' = q_k\,|c| + k_0 \text{ mit } 0 \leqq k_0 < |c| \\ k^* = gd' - hc' = q_{k^*}\,|c| + k_0^* \text{ mit } 0 \leqq k_0^* < |c| \end{cases}, \quad (kd \equiv -k^* \bmod c) \tag{8.6}$$

so schreibt sich die Regel (8. 2), unter Beachtung der Fußnote [3]), in diesen Bezeichnungen auch explizit als

$$\begin{aligned} s_{gh}(a, c) &= \sum_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{a}{c}\mu + \frac{k_0}{c} + \frac{g}{fc}\right) P_1\left(\frac{\mu}{c} + \frac{g}{fc}\right) \\ &= s_{g,-h}(d, c) = \sum_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{d}{c}\mu + \frac{k_0^*}{c} + \frac{g}{fc}\right) P_1\left(\frac{\mu}{c} + \frac{g}{fc}\right). \end{aligned} \tag{8.7}$$

In dieser Gestalt lassen sich die $s_{gh}(a, c)$ leicht umformen. Zunächst ist in Hinblick auf die Definitionen (7. 6) und (1. 10) bei der Normierung $0 \leqq g < f$

$$s_{gh}(a, c) = \sum_{\mu \bmod c} \left(\frac{a}{|c|}\mu + \frac{k_0}{|c|} + \frac{g}{f|c|} - \left[\frac{a}{|c|}\mu + \frac{k_0}{|c|} + \frac{g}{f|c|}\right] - \frac{1}{2}\right)$$
$$\times \left(\frac{\mu}{|c|} + \frac{g}{f|c|} - \left[\frac{\mu}{|c|} + \frac{g}{f|c|}\right] - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \sum_{\mu \bmod c} \left(P_1\left(\frac{a}{|c|}\mu + \frac{k_0}{|c|}\right) + \frac{g}{f|c|}\right)\left(P_1\left(\frac{\mu}{|c|}\right) + \frac{g}{f|c|}\right)$$
$$= \sum_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{a}{|c|}\mu + \frac{k_0}{|c|}\right) P_1\left(\frac{\mu}{|c|}\right) + \frac{g}{f|c|}\left(\sum_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{\mu}{|c|}\right) + \sum_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{a}{|c|}\mu + \frac{k_0}{|c|}\right)\right)$$
$$+ \left(\frac{g}{f}\right)^2 \frac{1}{c^2} \cdot |c|$$
$$= \sum_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{a}{|c|}\mu + \frac{k_0}{|c|}\right) P_1\left(\frac{\mu}{|c|}\right) + \frac{1}{|c|} R_2\left(\frac{g}{f}\right),$$

wobei allgemein zur Abkürzung

$$R_2(x) = R^2(x) - R(x) = P_2(x) - \frac{1}{6} \tag{8. 8}$$

gesetzt ist. Denkt man sich dieselbe Umformung auch für die Summe $s_{g,\,-h}(d, c)$ in (8. 7) durchgeführt, so erhält man durch Vergleich die Beziehung

$$\sum_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{a}{|c|}\mu + \frac{k_0}{|c|}\right) P_1\left(\frac{\mu}{|c|}\right) = \sum_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{d}{|c|}\mu + \frac{k_0^*}{|c|}\right) P_1\left(\frac{\mu}{|c|}\right), \tag{8. 9}$$

wobei wegen (8. 6) die Summationen auch nur über diejenigen μ mod c erstreckt zu werden brauchen, die echt-gebrochene Argumente in beiden Faktoren liefern.

Zur weiteren Umformung der allgemeinen Dedekindschen Summen hat man nunmehr die Umgestaltung an Summen des Typus (8. 9) vorzunehmen. Hierbei kann ohne Einschränkung $k_0 \neq 0$, also nach (8. 6) auch $k_0^* \neq 0$ angenommen werden, da die Summenausdrücke in (8. 9) sonst mit den speziellen Dedekindschen Summen $s(a, c) = s(d, c)$ im wesentlichen zusammenfallen.

Man hat nun der Reihe nach

$$\sum_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{a}{|c|}\mu + \frac{k_0}{|c|}\right) P_1\left(\frac{\mu}{|c|}\right) = \sum_{\substack{\mu \bmod c \\ \mu \not\equiv 0,\, k^* \bmod c}}' P_1\left(\frac{a}{|c|}\mu + \frac{k_0}{|c|}\right) P_1\left(\frac{\mu}{|c|}\right)$$
$$+ P_1\left(\frac{k_0}{|c|}\right) P_1(0) + P_1(0)\, P_1\left(\frac{k_0^*}{|c|}\right)$$
$$= \sum_{\substack{\mu \bmod c \\ \mu \not\equiv 0,\, k_0 \bmod c}}' P_1\left(\frac{\mu}{|c|} - \frac{k_0}{|c|}\right) P_1\left(\frac{d}{|c|}\mu\right) + \left(P_1\left(\frac{k_0}{|c|}\right) + P_1\left(\frac{k_0^*}{|c|}\right)\right) P_1(0)$$
$$= \sum_{\mu=1}^{k_0-1} \left(\frac{\mu}{|c|} - \frac{k_0}{|c|} - \left[\frac{\mu}{|c|} - \frac{k_0}{|c|}\right] - \frac{1}{2}\right) P_1\left(\frac{d}{|c|}\mu\right)$$
$$+ \sum_{\mu=k_0+1}^{|c|-1} \left(\frac{\mu}{|c|} - \frac{k_0}{|c|} - \left[\frac{\mu}{|c|} - \frac{k_0}{|c|}\right] - \frac{1}{2}\right) P_1\left(\frac{d}{|c|}\mu\right) + \left(P_1\left(\frac{k_0}{|c|}\right) + P_1\left(\frac{k_0^*}{|c|}\right)\right) P_1(0)$$
$$= \sum_{\mu=1}^{k_0-1} \left(P_1\left(\frac{\mu}{|c|}\right) - \frac{k_0}{|c|} + 1\right) P_1\left(\frac{d}{|c|}\mu\right) + \sum_{\mu=k_0+1}^{|c|-1} \left(P_1\left(\frac{\mu}{|c|}\right) - \frac{k_0}{|c|}\right) P_1\left(\frac{d}{|c|}\mu\right)$$
$$+ \left(P_1\left(\frac{k_0}{|c|}\right) + P_1\left(\frac{k_0^*}{|c|}\right)\right) P_1(0),$$

und hieraus ergibt sich endlich nach gehöriger Vereinfachung, unter Anwendung der schon mehrfach benutzten Gleichung

$$\sum_{\mu=1}^{|c|-1} P_1\left(\frac{d}{|c|}\mu\right) = \sum_{\mu \bmod c}' P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) = 0$$

sowie der Formeln

$$P_1\left(\frac{d}{|c|}k_0\right) = -P_1\left(\frac{k_0^*}{|c|}\right) = -P_1\left(\frac{k^*}{|c|}\right), \quad P_1(0) = -\frac{1}{2}$$

für die fragliche Summe links in (8. 9) die endgültige Umformung

$$(8.\,10) \qquad \sum_{\mu \bmod c} P_1\left(\frac{a}{|c|}\mu + \frac{k_0}{|c|}\right) P_1\left(\frac{\mu}{|c|}\right) = s(d, c) + \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{|c|}\mu\right) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{k_0}{|c|}\right).$$

Somit hat man für die allgemeine Dedekindsche Summe $s_{gh}(a, c)$ selbst die dann auch für $k_0 = 0$ gültige Reduktion

$$(8.\,11) \qquad \begin{aligned} s_{gh}(a, c) &= s(d, c) + t_{k_0}(d, |c|) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{k_0}{|c|}\right) + \frac{1}{|c|} R_2\left(\frac{g}{f}\right) \\ &= s(a, c) + t_{k_0}(d, |c|) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{k}{|c|}\right) + \frac{1}{|c|} R_2\left(\frac{g}{f}\right) \end{aligned}$$

auf die spezielle Dedekindsche Summe $s(d, c) = s(a, c)$ aus (1. 9) und auf die *allgemeine Eisenstein-Sternsche Summe*

$$(8.\,12) \qquad t_{k_0}(d, c) = t_{k_0}(a^{-1}, c) = t_{gh}(d, c) = \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right)$$

$$\text{mit} \begin{cases} k_0 \equiv g\dfrac{a-1}{f} + h\dfrac{c}{f} \bmod c, \ 0 \leqq k_0 < |c|, \\ ad \equiv 1 \bmod c, \ a \equiv d \equiv 1 \bmod f, \ c \equiv 0 \bmod f. \end{cases}$$

Solche und ähnliche Summen treten gelegentlich für den Spezialfall $g = 0$, $h \neq 0$ bei Eisenstein [3], Stern [23] und anderen auf[4]). Aus (8. 11) erhält man übrigens den in (7. 11) angegebenen expliziten Wert von $s_{gh}(1, c)$, wenn man darin die offenbar geschlossen berechenbaren Werte von $s(1, c)$ und $t_{k_0}(1, |c|)$, mit $k_0 \equiv h\dfrac{c}{f} \bmod c$, einträgt.

Denkt man sich die oben vorgenommene Umgestaltung auch für die rechte Seite von (8. 9) durchgeführt, so erhält man für die allgemeine Dedekindsche Summe $s_{g,-h}(d, c)$ in der zweiten Zeile der Gleichung (8. 7) die entsprechende Reduktion

$$(8.\,13) \qquad \begin{aligned} s_{g,-h}(d, c) &= s(a, c) + \sum_{\mu=1}^{k_0^*} P_1\left(\frac{a}{|c|}\mu\right) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{k_0^*}{|c|}\right) + \frac{1}{|c|} R_2\left(\frac{g}{f}\right) \\ &= s(d, c) + t_{k_0^*}(a, |c|) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{k_0^*}{|c|}\right) + \frac{1}{|c|} R_2\left(\frac{g}{f}\right). \end{aligned}$$

Durch Vergleich von (8. 11) und (8. 13) erhellt somit gemäß (8. 7), daß explizit

$$(8.\,14) \qquad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{k}{c}\right) = \sum_{\mu=1}^{k_0^*} P_1\left(\frac{a}{c}\mu\right) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{k^*}{c}\right)$$

ist, und diese Gleichung ist trivialerweise auch für $k = k_0^* = 0$ richtig. Man kann die obige Summe $t_{k_0}(d, c)$ formal noch etwas anders schreiben, indem man die Summation bis zu k hin anstatt bis zu seinem kleinsten nicht-negativen Rest $k_0 \bmod c$ hin erstreckt. So hat man auch

[4]) Die betreffenden Summen werden von den genannten Autoren jedoch mittels der Bildung $[x]$ anstatt mittels der Funktion $P_1(x)$ definiert.

$$(8.15)\quad t_{k_0}(d,c) = t_k(d,c) = \begin{cases} \sum\limits_{\mu=1}^{k}{}' P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) \text{ für } k \geqq 0, \\ -\sum\limits_{\mu=-1}^{k}{}' P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - P_1\left(\frac{k^*}{c}\right) \text{ für } k<0,\ k \not\equiv 0 \bmod c,\ k^* \not\equiv 0 \bmod c, \\ -\sum\limits_{\mu=-1}^{k}{}' P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) = 0 \text{ für } k<0,\ k \equiv k^* \equiv 0 \bmod c, \end{cases}$$

wobei der Strich am Summenzeichen jeweils andeutet, daß bei der Summation nur über die angegebenen $\mu \not\equiv 0 \bmod c$ summiert werden soll.

Die Relation (8. 14) kann noch in eine formal etwas allgemeinere Gestalt gebracht werden, welche die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der einzelnen Bestimmungsstücke deutlicher in Erscheinung treten läßt. Dazu seien a, b, c, d irgendwelche von Null verschiedene ganze Zahlen mit $ad \equiv 1 \bmod c$, $-bc \equiv 1 \bmod a$. Es seien ferner x und u nicht-negative ganze Zahlen aus den Intervallen $0 \leqq x < |c|$ bzw. $0 \leqq u < |a|$, auf die es hinterher wesentlich nur mod c bzw. mod a ankommen wird. Entwickelt man dann die Summen

$$\sum_{\substack{\mu \bmod c \\ \mu \not\equiv 0,\ x \bmod c}}{}' P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) P_1\left(\frac{\mu}{c} - \frac{x}{c}\right) \text{ bzw. } \sum_{\substack{\nu \bmod a \\ \nu \not\equiv 0,\ u \bmod a}}{}' P_1\left(\frac{c}{a}\nu\right) P_1\left(\frac{\nu}{a} - \frac{u}{a}\right)$$

jeweils durch Summationstransformation nach dem in Anschluß an (8. 9) durchgeführten Reduktionsschema auf zwei Weisen, so erhält man die zu (8. 14) analogen Formeln

$$(8.16)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\mu=1}^{x} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{d}{c}x\right) = \sum\limits_{\mu=1}^{y} P_1\left(\frac{a}{c}\mu\right) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{x}{c}\right) \\ \sum\limits_{\nu=1}^{u} P_1\left(\frac{c}{a}\nu\right) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{c}{a}u\right) = \sum\limits_{\nu=1}^{v} P_1\left(-\frac{b}{a}\nu\right) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{u}{a}\right) \end{cases}$$

für die allgemeinen Eisenstein-Sternschen Summen $t_x(d,c)$, $t_y(a,c)$ bzw. $t_u(c,a)$, $t_v(-b,a)$. Dabei bedeuten y und v den kleinsten nicht-negativen Rest von dx mod c bzw. cu mod a. Die oben angenommene Beschränkung für x und u erweist sich als unwesentlich, wenn man die in (8. 15) gegebene allgemeinere Darstellungsform für die Eisenstein-Sternschen Summen zugrunde legt.

3. Auf Grund der Reduktion in (8. 11), (8. 13) erhält nunmehr die *Reziprozitätsformel für die allgemeinen Dedekindschen Summen* $s_{gh}(a,c)$ und $s_{hg}(d,b)$ in (7. 12) die endgültige Gestalt als *Relation zwischen den Eisenstein-Sternschen Summen* $t_{k_0}(d,c)$ und $t_{l_0}(a,b)$

$$(8.17)\quad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$
$$= \frac{1}{2}\left(R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} + R_2\left(\frac{h}{f}\right)\frac{a+d-2}{b}\right) + \frac{(\operatorname{sgn} b + \operatorname{sgn} c)(\operatorname{sgn} d - 1)}{4}.$$

Hierin ist analog zu (8. 6) abkürzend, bei gleichzeitiger Betrachtung mod b,

$$(8.18)\quad \begin{cases} l = hd' + gb' = q_l\,|b| + l_0 & \text{mit } 0 \leqq l_0 < |b| \\ l^* = ha' - gb' = q_{l^*}|b| + l_0^* & \text{mit } 0 \leqq l_0^* < |b| \end{cases}, \qquad (la \equiv -l^* \bmod b)$$

angesetzt. Die verschiedenen Größen in (8. 6) und (8. 18) hängen untereinander durch die Gleichungen

$$(8.19)\quad \left\{\begin{matrix} kd = lc - k^*, & kb = l^* + la \\ k^*a = -l^*c - k, & k^*b = -l^*d - l \end{matrix}\right\}$$

zusammen.

Bei dem rein-arithmetischen Beweis der obigen Reziprozitätsformel (8. 17) spielt eine auf Gauß [7] (Bachmann [1]) zurückgehende Reziprozität zwischen Summen aus größten Ganzen eine wichtige Rolle. Es sei x ein positiver echter Bruch, und es seien die natürlichen Vielfachen $x, 2x, \ldots, nx$ ebenfalls sämtlich positive echte Brüche. Dann lautet die fragliche *Gaußsche Reziprozitätsformel*

$$\sum_{\nu=1}^{n} [\nu x] + \sum_{\nu=1}^{[nx]} \left[\nu \frac{1}{x}\right] = n \cdot [nx]. \tag{8. 20}$$

Für das Folgende ist es zweckmäßig, diese Formel mittels der Funktion $P_1(x)$ aus (1. 10) zu schreiben. Man erhält dann unmittelbar auch

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_1(\nu x) + \sum_{\nu=1}^{[nx]} P_1\left(\nu \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} R_2(nx) + R(nx)\right). \tag{8. 21}$$

Der Beweis für (8. 20) und damit auch (8. 21) liegt übrigens auf der Hand, wenn man sich der gittergeometrischen Ausdrucksweise bedient. Die Summe rechter Hand in (8. 20) läßt sich als die Gesamtanzahl der Gitterpunkte in einem Rechteck deuten, dessen Seitenlängen n und nx sind. Diese Anzahl setzt sich, wie linker Hand in Formeln angegeben, additiv aus den Teilanzahlen der Gitterpunkte in den beiden rechtwinkligen Dreiecken zusammen, die aus dem Rechteck durch Ziehen der von links unten nach rechts oben verlaufenden Diagonale entstehen. Dabei ist zu beachten, daß auf Grund der gemachten arithmetischen Voraussetzungen auf dieser Diagonalen selbst keine Gitterpunkte liegen.

Aus (8. 21) erhält man nunmehr für den Spezialfall $x = \frac{d}{c}$, $n = k_0$, wobei jetzt x auch negativ sein darf, die für den Beweis von (8. 17) wichtigste Hilfsformel

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[k_0 \left|\frac{d}{c}\right|\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d} R_2\left(k \left|\frac{d}{c}\right|\right) + \operatorname{sgn}\frac{c}{d} R\left(k \left|\frac{d}{c}\right|\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d} R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + \operatorname{sgn}\frac{c}{d} R\left(\operatorname{sgn}\frac{c}{d} \cdot \frac{-k^*}{c}\right)\right), \end{aligned} \tag{8. 22}$$

letzteres, unter Beachtung der Periodizität von $R_2(x)$ und $R(x)$ mod$^+$ 1, wegen der nach (8. 19) bestehenden Kongruenz $kd \equiv -k^* \bmod c$ sowie der Spiegelungseigenschaft $R_2(-x) = R_2(x)$.

Die für den vollständigen Beweis von (8. 17) hier befolgte, sich wesentlich auf (8. 22) stützende Methode macht zahlreiche Fallunterscheidungen erforderlich. Es wird genügen, den Beweis lediglich für die eine Hälfte aller auftretenden Fälle in allen Einzelheiten durchzuführen, da die andere Hälfte sich methodisch völlig analog behandeln läßt. Die fragliche Gesamtheit der betrachteten Fälle sei nun für das Folgende durchweg durch die Forderung

$$k = ga' + hc' \geqq 0 \text{ mit } 0 \leqq g < f,\ 0 \leqq h < f \tag{8. 23}$$

unter allen Möglichkeiten hervorgehoben. Es bedeutet weiter keine Einschränkung, den Quotienten $\frac{d}{c}$ der im folgenden festzuhaltenden Bedingung

$$\left|\frac{d}{c}\right| < 1 \tag{8. 24}$$

zu unterwerfen. Andernfalls hätte man nämlich wegen $ad - bc = 1$ für den komplementären Quotienten $\frac{a}{b}$ die Ungleichung $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$, und in diesem Fall hätte man dann in

Hinblick auf die Gestalt der Formel (8. 17) an die zugehörige Zahl $l = hd' + gb'$ die Bedingung (8. 23) zu stellen und sich beim Beweis von (8. 17) auf eine zu (8. 22) analoge Hilfsformel zu stützen. Auf Grund der Voraussetzung (8. 23) kann man nun die Formel (8. 22) offenbar auch in der folgenden Gestalt schreiben:

$$(8.\,25)\qquad \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\not\equiv 0 \bmod c}}^{k}{}' P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\not\equiv 0 \bmod d}}^{\left[k\left|\frac{d}{c}\right|\right]}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + \operatorname{sgn}\frac{c}{d}\,R\left(\operatorname{sgn}\frac{c}{d}\cdot\frac{-k^*}{c}\right)\right).$$

Man hat jetzt eine Fallunterscheidung zu treffen, je nachdem gemäß (8. 24) $0 < \frac{d}{c} < 1$ oder $-1 < \frac{d}{c} < 0$ gilt.

I. Es sei $0 < \frac{d}{c} < 1$, $\operatorname{sgn} c = \operatorname{sgn} d$. Wegen $kd = lc - k^*$ ist

$$\left[k\frac{d}{c}\right] = l + \left[-\frac{k^*}{c}\right],$$

wobei hier die Alternative

$$\left[-\frac{k^*}{c}\right] = \left[\frac{h}{f} - \frac{g}{f}\,\frac{d-1}{c}\right] = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 1 > -\frac{k^*}{c} \geqq 0, \\ -1 & \text{für} \quad -1 < -\frac{k^*}{c} < 0 \end{cases}$$

besteht.

Dementsprechend hat man wieder zwei Unterfälle zu unterscheiden.

1. Es sei $\left[-\frac{k^*}{c}\right] = 0$. Dann ist $\left[k\frac{d}{c}\right] = l \geqq 0$. Damit schreibt sich (8. 25) in der Gestalt

$$(8.\,26)\qquad \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\not\equiv 0 \bmod c}}^{k}{}' P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\not\equiv 0 \bmod d}}^{l}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right).$$

Für die zweite Summe links erhält man unter Beachtung von $P_1(z) = P_1(0) = -\frac{1}{2}$ für ganzes z weiter

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\not\equiv 0 \bmod d}}^{l}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{l} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|d|}\right] = \sum_{\nu=1}^{l} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right],$$

letzteres wegen $\left[\frac{k}{|c|}\right] = \left[\frac{l}{|d|} + \frac{1}{|d|}\cdot\frac{-k^*}{c}\right] = \left[\frac{l}{|d|}\right]$, da $0 \leqq -\frac{k^*}{c} < 1$ ist. Für die letzte Summe hat man wegen der Gleichung $ad - bc = 1$, also $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} - \frac{1}{bd}$ die Umformung

$$\sum_{\nu=1}^{l} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{l}\left(\frac{a}{b}\nu - \frac{\nu}{bd} - \left[\frac{a}{b}\nu - \frac{\nu}{bd}\right] - \frac{1}{2}\right).$$

Hierin ist nun

$$(8.\,27)\qquad \left[\frac{c}{d}\nu\right] = \left\{\begin{matrix} \left[\frac{a}{b}\nu\right] & \text{für } \nu \not\equiv 0 \bmod b \\ \left[\frac{a}{b}\nu\right] - 1 & \text{für } \nu \equiv 0 \bmod b \end{matrix}\right\}, \text{ wenn } bd > 0, \text{ also } b > 0,\ d > 0 \quad (\text{da } l = hd' + gb' \geqq 0),$$

bzw.

$$(8.28)\quad \left[\frac{c}{d}\nu\right] = \begin{cases} \left[\frac{a}{b}\nu\right] & \text{für } \nu \not\equiv 0 \bmod d \\ \left[\frac{a}{b}\nu\right] + 1 & \text{für } \nu \equiv 0 \bmod d \end{cases}, \text{ wenn } bd < 0.$$

Damit wird endlich

$$(8.29)\quad \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{l}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{l} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{bd}\sum_{\nu=1}^{l}\nu + \left[\frac{l}{b}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right]$$

$$= \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \not\equiv 0 \bmod b}}^{l}{}' P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{l}{b}\right] - \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} + \left[\frac{l}{b}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{b}\right],$$

wenn $bd > 0$, also $b > 0$, $d > 0$, $c > 0$, $a > 0$,

bzw.

$$(8.30)\quad \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{l}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{l} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{bd}\sum_{\nu=1}^{l}\nu - \left[\frac{l}{|d|}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right]$$

$$= \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \not\equiv 0 \bmod b}}^{l}{}' P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right] - \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right],$$

wenn $bd < 0$.

Im Fall $bd > 0$ erhält man nunmehr für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) auf Grund der vorgenommenen Umformungen

$$(8.31)\quad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{l}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right] - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} - \frac{1}{2}\left[\frac{l}{b}\right] - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[k_0\frac{d}{c}\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2},$$

letzteres gemäß Formel (8. 26). Trägt man hierin die expliziten Werte für k, k^*, l aus (8. 6), (8. 18) ein, so erhält man endlich für die linke Seite der behaupteten Gleichung (8. 17) durch Ausrechnung

$$(8.32)\quad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}\left(\frac{hc'-gd'}{c}\right)^2 - \frac{c}{d}\frac{hc'-gd'}{c} + \frac{hc'-gd'}{c} - \frac{ga'+hc'}{c} - \frac{hd'+gb'}{b} + \frac{(hd'+gb')(hd'+gb'+1)}{bd}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{g}{f}\right)^2 \frac{a+d-2}{c} - \frac{g}{f}\frac{a+d-2}{c} + \left(\frac{h}{f}\right)^2 \frac{a+d-2}{b} - \frac{h}{f}\frac{a+d-2}{b}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} + R_2\left(\frac{h}{f}\right)\frac{a+d-2}{b}\right).$$

Da im vorliegenden Fall $bd > 0$ sowohl $b > 0$ als auch $d > 0$ gilt, ist dies gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17).

Der Fall $bd < 0$ zerfällt wieder in zwei Unterfälle, je nachdem $b < 0$ oder $b > 0$ ist.

α) Es sei $b < 0$, $d > 0$, $c > 0$, $a < 0$. Dann ist $k = ga' + hc' < c$, also $k = k_0$. Für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) erhält man somit unter Anwendung von (8. 30) nach nunmehr geläufigem Umformungsschema sogleich

$$(8.33)\quad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$
$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[k_0\frac{d}{c}\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right] - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right] - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2},$$

und hierfür ergibt sich wegen völliger Übereinstimmung mit (8. 31) gerade der oben in (8. 32) angegebene Wert. Da im vorliegenden Fall $d > 0$ ist, ist dies wieder gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17).

β) Es sei $b > 0$, $d < 0$, $c < 0$, $a > 0$. Dann ist $0 \leqq l = hd' + gb' < b$, also $l = l_0$. Für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) erhält man somit unter Anwendung von (8. 30) nach geläufigem Umformungsschema sogleich

$$(8.34)\quad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$
$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[l_0\frac{d}{c}\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right] - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{b}\right] - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2},$$

und hierfür ergibt sich wieder der oben in (8. 32) angegebene Wert. Da im vorliegenden Fall $b > 0$, $c < 0$ gilt, ist dies gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17).

2. Es sei $\left[-\frac{k^*}{c}\right] = -1$. Dann ist $\left[k\frac{d}{c}\right] = l - 1 \geqq 0$, also $l \geqq 1$. Damit schreibt sich (8. 25) in der Gestalt

$$(8.35)\quad \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\not\equiv 0 \bmod c}}^{k}{}' P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\not\equiv 0 \bmod d}}^{l-1}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right).$$

Hierin ist nun weiter, unter Beachtung von $P_1(z) = P_1(0) = -\frac{1}{2}$ für ganzes z,

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{l-1}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{l-1} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{l-1}{|d|}\right] = \sum_{\nu=1}^{l} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) - P_1\left(\frac{k^*}{d}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right],$$

letzteres in Hinblick auf $kd = lc - k^*$ und wegen $\left[\frac{k}{|c|}\right] = \left[\frac{l-1}{|d|} + \frac{1-\frac{k^*}{c}}{|d|}\right] = \left[\frac{l-1}{|d|}\right]$, da $-1 \leqq -\frac{k^*}{c} < 0$ ist. Unter Anwendung von (8. 27), (8. 28) erhält man daraus dann die zu (8. 29), (8. 30) analogen Formeln

$$(8.36)\quad \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{l-1}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} - P_1\left(\frac{k^*}{d}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{b}\right],$$

$$\text{wenn } bd > 0, \text{ also } b > 0,\ d > 0,\ c > 0,\ a > 0,$$

bzw.

$$(8.37)\quad \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{l-1}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} - P_1\left(\frac{k^*}{d}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right] - \left[\frac{l}{|d|}\right],$$

$$\text{wenn } bd < 0.$$

Im Fall $bd > 0$ hat man zunächst wegen $\left[-\frac{k^*}{c}\right] = -1$ und $c > 0,\ d > 0$ $0 < k^* = gd' - hc' < d$; somit ist $\left[\frac{k^*}{d}\right] = 0$. Für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) erhält man dann unter Anwendung von (8. 36) nach geläufigem Umformungsschema

$$(8.38)\quad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{l-1} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} + P_1\left(\frac{k^*}{d}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right] - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} - \frac{1}{2}\left[\frac{l}{b}\right] - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[k_0\frac{d}{c}\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + P_1\left(\frac{k^*}{d}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right) + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{k^*}{d} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(\frac{k^*}{c}\right) - R\left(\frac{k^*}{c}\right) - \frac{k}{c} - \frac{l}{b} + 2\frac{k^*}{d} + \frac{1}{bd}l(l+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}\left(\frac{gd'-hc'}{c}\right)^2 + \frac{gd'-hc'}{d} - \frac{gd'-hc'}{c} - \frac{ga'+hc'}{c} - \frac{hd'+gb'}{b}\right.$$
$$\left. + \frac{(hd'+gb')(hd'+gb'+1)}{bd}\right).$$

Dieser letzte Ausdruck stimmt nun mit dem in (8. 32) auftretenden völlig überein und hat somit den dort angegebenen Wert. Da im vorliegenden Fall $bd > 0$ sowohl $b > 0$ als auch $d > 0$ gilt, ist dies gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17).

Der Fall $bd < 0$ zerfällt wieder in zwei Unterfälle, je nachdem $b < 0$ oder $b > 0$ ist.

α) Es sei $b < 0$, $d > 0$, $c > 0$, $a < 0$. Dann ist $k = ga' + hc' < c$, also $k = k_0$, ferner ist wie oben $\left[\frac{k^*}{d}\right] = 0$, und wegen $1 \leqq l = hd' + gb' < d$ ist auch $\left[\frac{l}{d}\right] = 0$. Für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) erhält man somit unter Anwendung von (8. 37) nach geläufigem Umformungsschema sogleich

$$(8.\,39)\quad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[k_0\frac{d}{c}\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right] - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right] - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b} + \left[\frac{l}{d}\right]$$

$$+ P_1\left(\frac{k^*}{d}\right) + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{k^*}{d} - \frac{1}{2} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2},$$

und hierfür ergibt sich wegen völliger Übereinstimmung mit (8. 38) der dort angegebene Wert. Da im vorliegenden Fall $d > 0$ ist, ist dies wieder gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17).

β) Es sei $b > 0$, $d < 0$, $c < 0$, $a > 0$. Dann ist $1 \leqq l = hd' + gb' < b$, also $l = l_0$. Ferner ist wegen $\left[-\frac{k^*}{c}\right] = -1 - |c| \leqq k^* = gd' - hc' < 0$, daher $d < k^* < 0$. Also ist wie unter α) $\left[\frac{k^*}{d}\right] = 0$, was insbesondere $d \nmid k^*$ zur Folge hat. Somit hat man in Hinblick auf (8. 19) $\left[\frac{l}{|d|}\right] = \left[\frac{l-1}{|d|}\right] = \left[\frac{k}{|c|}\right]$. Für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) erhält man danach unter Anwendung von (8. 37) nach geläufigem Umformungsschema sogleich

$$(8.\,40)\quad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[k_0\frac{d}{c}\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right] + \left[\frac{l}{|d|}\right] - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{b}\right] - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$

$$+ P_1\left(\frac{k^*}{d}\right) + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{k^*}{d} - \frac{1}{2} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2},$$

und hierfür ergibt sich wegen völliger Übereinstimmung mit (8. 38) der dort angegebene Wert. Da im vorliegenden Fall $b > 0$, $c < 0$ gilt, ist dies gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17).

II. Es sei $-1 < \frac{d}{c} < 0$, $\operatorname{sgn} c = -\operatorname{sgn} d$. Wegen $kd = lc - k^*$ ist

$$\left[k\left|\frac{d}{c}\right|\right] = -l + \left[\frac{k^*}{c}\right],$$

wobei hier die Alternative

$$\left[\frac{k^*}{c}\right] = \left[\frac{g}{f}\,\frac{d-1}{c} - \frac{h}{f}\right] = \begin{cases} -1 \text{ für } -1 \leqq \frac{k^*}{c} < 0, \\ -2 \text{ für } -2 < \frac{k^*}{c} < -1 \end{cases}$$

besteht. Dementsprechend hat man wieder zwei Unterfälle zu unterscheiden.

1. Es sei $\left[\frac{k^*}{c}\right] = -1$. Dann ist $\left[k \,\middle|\, \frac{d}{c}\right] = -l-1 \geqq 0$, also $-l \geqq 1$. Damit schreibt sich (8. 25) in der Gestalt

$$\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu \not\equiv 0 \bmod c}}^{k}{}' P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-1}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d} R_2\left(\frac{k^*}{c}\right) - R\left(\frac{k^*}{c}\right)\right). \tag{8. 41}$$

Für die zweite Summe links erhält man unter Beachtung von $P_1(z) = P_1(0) = -\frac{1}{2}$ für ganzes z weiter

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-1}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\right)\nu = \sum_{\nu=1}^{-l-1} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{-l-1}{|d|}\right] = \sum_{\nu=1}^{-l-1} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right],$$

letzteres wegen $\left[\frac{k}{|c|}\right] = \left[\frac{-l-1}{|d|} + \frac{1+\frac{k^*}{c}}{|d|}\right] = \left[\frac{-l-1}{d}\right]$, da $-1 \leqq \frac{k^*}{c} < 0$ ist.

Unter Anwendung von (8. 27), (8. 28) erhält man daraus weiter die Umformungen

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-1}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) &= \sum_{\nu=1}^{-l-1} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{bd}\sum_{\nu=1}^{-l-1}\nu + \left[\frac{-l-1}{|b|}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right]\\ &= \sum_{\nu=1}^{-l} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - P_1\left(\frac{l^*}{b}\right) - \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} + \left[\frac{-l-1}{|b|}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right],\end{aligned}$$

wenn $bd > 0$, also $b < 0$, $d < 0$, $c > 0$, $a > 0$, (da $l = hd' + gb' < 0$),

bzw.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-1}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) &= \sum_{\nu=1}^{-l-1} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{bd}\sum_{\nu=1}^{-l-1}\nu - \left[\frac{-l-1}{|d|}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right]\\ &= \sum_{\nu=1}^{-l} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - P_1\left(\frac{l^*}{b}\right) - \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right],\end{aligned}$$

wenn $bd < 0$,

letzteres jeweils wegen $P_1\left(-\frac{a}{b}l\right) = P_1\left(\frac{l^*}{b}\right)$, da $kb = l^* + la$ ist. Unter Beachtung von (8. 15) erhält man daraus endlich die zu (8. 29), (8. 30); (8. 36), (8. 37) analogen Formeln

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-1}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right] - \frac{1}{2} - \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}, \tag{8. 42}$$

wenn $bd > 0$, also $b < 0$, $d < 0$, $c > 0$, $a > 0$,

bzw.

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu \not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-1}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right] + \frac{1}{2} - \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}, \tag{8. 43}$$

wenn $bd < 0$.

Beide Darstellungen sind für $l_0 \neq 0$, $l_0^* \neq 0$ als auch $l_0 = l_0^* = 0$ gültig.

Im Fall $bd > 0$ erhält man nunmehr für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) unter Anwendung von (8. 42) nach geläufigem Umformungsschema sogleich

$$(8.44)\quad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[k_0\left|\frac{d}{c}\right|\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right] - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right] - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b} + \frac{1}{2} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}.$$

Da hierin jetzt $0 < -\frac{k^*}{c} < 1$ gilt, stimmt dieser letztere Ausdruck mit dem in (8. 31), (8. 34) zuletzt auftretenden völlig überein und hat somit den in (8. 32) angegebenen Wert. Da im vorliegenden Fall $bd > 0$ gilt $b < 0$, $c > 0$, ist dies gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17).

Der Fall $bd < 0$ zerfällt wieder in zwei Unterfälle, je nachdem $b < 0$ oder $b > 0$ ist.

α) Es sei $b < 0$, $d > 0$, $c < 0$, $a > 0$. Dann ist $1 \leqq -l < |b|$, also $\left[\frac{-l}{|b|}\right] = 0$, $\left[\frac{l}{|b|}\right] = -1$, $l = -|b| + l_0$. Ferner ist wegen $\left[\frac{k^*}{c}\right] = -1$ $0 < k^* = gd' - hc' \leqq |c|$.

Es sei zunächst $k^* \neq -c$. Für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) erhält man dann unter Anwendung von (8. 43) nach geläufigem Umformungsschema sogleich

$$(8.45)\quad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[k_0\left|\frac{d}{c}\right|\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right] - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{1}{2} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2},$$

und dieser letztere Ausdruck stimmt mit dem zuletzt in (8. 44) auftretenden überein und hat den in (8. 32) angegebenen Wert. Da im vorliegenden Fall $d > 0$ ist, ist dies gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17).

Ist dagegen $k^* = -c$, also $k_0^* = k_0 = 0$, so lautet die (8. 45) entsprechende Umformung einfach

$$(8.46)\quad \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b} = -\frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{1}{2} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2},$$

und die rechte Seite dieser Formel stimmt wieder mit dem in (8. 32) auftretenden Ausdruck überein. Somit ist die Gleichung (8. 17) auch in diesem Fall bewiesen.

β) Es sei $b > 0$, $d < 0$, $c > 0$, $a < 0$. Dann ist $k = ga' + hc' < c$, also $k = k_0$. Wegen $\left[\frac{k^*}{c}\right] = -1$ ist ferner $-c \leqq k^* = gd' - hc' < 0$.

Es sei zunächst $k^* \neq -c$. Für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) erhält man dann unter Anwendung von (8. 43) nach geläufigem Umformungsschema sogleich

$$(8.47)\qquad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[k_0\left|\frac{d}{c}\right|\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\left[\frac{l}{b}\right] - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} - 1.$$

Für diesen Ausdruck ohne -1 ergibt sich wieder der in (8. 32) angegebene Wert. Da im vorliegenden Fall $b > 0$, $c > 0$, $d < 0$ gilt, ist der Gesamtausdruck gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17).

Ist dagegen $k^* = -c$, also $k_0^* = k_0 = 0$, so lautet die (8. 47) entsprechende Umformung einfach

$$(8.48)\qquad \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b} = -\frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2} + \frac{1}{2} - 1,$$

und für den Ausdruck rechts ohne -1 ergibt sich wieder der in (8. 32) angegebene Wert, so daß auch hier der Gesamtausdruck gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17) darstellt.

2. Es sei $\left[\frac{k^*}{c}\right] = -2$. Dann ist $\left[k\left|\frac{d}{c}\right|\right] = -l-2 \geqq 0$, also $-l \geqq 2$. Damit schreibt sich (8. 25) in der Gestalt

$$(8.49)\qquad \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\not\equiv 0 \bmod c}}^{k}{}' P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-2}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(\frac{k^*}{c}\right) - R\left(\frac{k^*}{c}\right)\right).$$

Für die zweite Summe links erhält man unter Beachtung von $P_1(z) = P_1(0) = -\frac{1}{2}$ für ganzes z weiter

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-2}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{-l-2} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{-l-2}{|d|}\right] = \sum_{\nu=1}^{-l-2} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right],$$

letzteres wegen $\left[\frac{k}{|c|}\right] = \left[\frac{-l-2}{|d|} + \frac{2+\frac{k^*}{c}}{|d|}\right] = \left[\frac{-l-2}{|d|}\right]$, da $-2 < \frac{k^*}{c} < -1$ ist. Unter Anwendung von (8. 27), (8. 28) erhält man daraus weiter die Umformungen

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-2}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{-l-2} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{bd}\sum_{\nu=1}^{-l-2}\nu + \left[\frac{-l-2}{|b|}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{-l} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - P_1\left(\frac{l^*}{b}\right) - P_1\left(\frac{l^*-a}{b}\right) - \frac{1}{bd}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2}$$

$$+ \left[\frac{-l-2}{|b|}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right],$$

wenn $bd > 0$, also $b < 0$, $d < 0$, $c > 0$, $a > 0$, (da $l = hd' + gb' < 0$),

bzw.

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-2}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{-l-2} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{bd}\sum_{\nu=1}^{-l-2}\nu - \left[\frac{-l-2}{|d|}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{-l} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - P_1\left(\frac{l^*}{b}\right) - P_1\left(\frac{l^*-a}{b}\right) - \frac{1}{bd}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right],$$

wenn $bd < 0$,

letzteres jeweils wegen $P_1\left(-\frac{a}{b}l\right) = P_1\left(\frac{l^*}{b}\right)$, $P_1\left(-\frac{a}{b}(l+1)\right) = P_1\left(\frac{l^*-a}{b}\right)$, da $kb = l^* + la$ ist. Unter Beachtung von (8. 15) erhält man daraus dann endlich die zu (8. 29), (8. 30); (8. 36), (8. 37); (8. 42), (8. 43) analogen Formeln

$$(8.\,50)\qquad \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-2}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right] - \frac{1}{2} - P_1\left(\frac{l^*-a}{b}\right) - \frac{1}{bd}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2},$$

wenn $bd > 0$, also $b < 0$, $d < 0$, $c > 0$, $a > 0$;
$b \nmid l^* - a$, also $b \nmid l + 1$ (vgl. (8. 54)),

bzw.

$$(8.\,51)\qquad \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-2}{}' P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right] + \frac{1}{2} - P_1\left(\frac{l^*-a}{b}\right) - \frac{1}{bd}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2},$$

wenn $bd < 0$ [5]).

Beide Darstellungen sind für $l_0 \neq 0$, $l_0^* \neq 0$ wie auch für $l_0 = l_0^* = 0$ gültig. Da nach Voraussetzung

$$-2 < \frac{k^*}{c} = \frac{g}{f}\,\frac{d-1}{c} - \frac{h}{f} < -1$$

ist, folgt hieraus

$$\frac{g}{2f-h} < -\frac{c}{d-1} < \frac{g}{f-h},$$

wobei alle auftretenden Nenner von Null verschieden sind. Durch Umrechnung dieser Ungleichung auf den positiven Bruch $-\frac{a-1}{b}$ vermöge $ad - bc = 1$ und Eintragung in

$$\frac{l^*-a}{b} = \frac{ha' - gb' - a}{b} = -\frac{f-h}{f}\,\frac{a-1}{b} - \frac{g}{f} - \frac{1}{b}$$

erkennt man, daß im vorliegenden Fall die Ungleichung

$$(8.\,52)\qquad -1 < \frac{l^*-a}{b} \leqq 0$$

erfüllt ist.

Im Fall $bd > 0$, $l^* \neq a$, erhält man nunmehr für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) unter Anwendung von (8. 50) nach geläufigem Umformungsschema

$$(8.\,53)\qquad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\,\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\,\frac{l_0}{b}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[k_0\left|\frac{d}{c}\right|\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right] - \frac{1}{2}\,\frac{k_0}{c} + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right] - \frac{1}{2}\,\frac{l_0}{b} + P_1\left(\frac{l^*-a}{b}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2}$$

[5]) Die Möglichkeit $b \mid l^* - a$, d. h. $b \mid l + 1$ kann hier nicht eintreten.

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right)+R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right)-\frac{1}{2}\frac{k}{c}-\frac{1}{2}\frac{l}{b}+\frac{l^*-a}{b}+\frac{1}{2}+\frac{1}{bd}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}\left(\left(-\frac{k^*}{c}-1\right)^2-\left(-\frac{k^*}{c}-1\right)\right)+\left(-\frac{k^*}{c}-1\right)\right)-\frac{1}{2}\frac{k}{c}-\frac{1}{2}\frac{l}{b}+\frac{1}{2}+\frac{l^*-a}{b}$$
$$+\frac{1}{bd}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}\left(-\frac{k^*}{c}\right)^2-\frac{c}{d}\left(-\frac{k^*}{c}\right)+\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right)-\frac{1}{2}\frac{k}{c}-\frac{1}{2}\frac{l}{b}+\frac{1}{bd}\cdot\frac{l(l+1)}{2},$$

wobei bei der Rechnung berücksichtigt ist, daß gemäß (8. 19) die Beziehung

$$\frac{c+k^*}{d}+\frac{l^*-a}{b}+\frac{l+1}{bd}=\frac{bc-ad+1+k^*b+l^*d+l}{bd}=\frac{0+0}{bd}=0$$

besteht. Der in (8. 53) zuletzt auftretende Ausdruck stimmt mit dem in (8. 32) überein und hat den dort angegebenen Wert. Da im vorliegenden Fall $bd>0$ gilt $b<0$, $c>0$, ist dies gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17).

Ist jedoch $l^*=a$, so hat man gemäß (8. 19) $b\mid l+1$, also $l_0=|b|-1$. An die Stelle von (8. 50) tritt dann wegen $\left[\frac{-l-2}{|b|}\right]=\left[\frac{-l}{|b|}\right]-1$ die einfachere Hilfsformel

$$\text{(8. 54)}\qquad \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\not\equiv 0 \bmod d}}^{-l-2} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{k}{c}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right]-1-\frac{1}{bd}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2},$$

und für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) ergibt sich damit dieselbe Umformung wie oben in (8. 53). Somit ist die Gleichung (8. 17) auch in diesem Fall bewiesen.

Der Fall $bd<0$ zerfällt wieder in zwei Unterfälle, je nachdem $b<0$ oder $b>0$ ist. Hierzu ist zu bemerken, daß in diesen beiden Unterfällen die nach (8. 52) mögliche und für $bd>0$ auch wirklich eintretende Gleichheit $l^*=a$ nicht eintreten kann. Denn aus $l^*=a$ folgte $k^*a=-l^*c-k=-ac-k$, also $\frac{k^*}{c}=-1-\frac{k}{ac}$ und wegen $ac<0$ somit $\left[\frac{k^*}{c}\right]=-1$, wider die allgemeine Voraussetzung in 2.

α) Es sei $b<0$, $d>0$, $c<0$, $a>0$. Dann ist $2\leqq -l=-hd'-gb'<|b|$, also $\left[\frac{-l}{|b|}\right]=0$, $\left[\frac{l}{|b|}\right]=-1$, $l=-|b|+l_0$. Für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) erhält man dann unter Anwendung von (8. 51) nach geläufigem Umformungsschema sogleich

$$\text{(8. 55)}\qquad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right)-\frac{1}{2}\frac{k_0}{c}+\sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right)-\frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$
$$=\sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right)+\sum_{\nu=1}^{\left[k_0\left|\frac{d}{c}\right|\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right]-\frac{1}{2}\frac{k_0}{c}-\frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right]-\frac{1}{2}\frac{l_0}{b}-\frac{1}{2}$$
$$+P_1\left(\frac{l^*-a}{b}\right)+\frac{1}{bd}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem in (8. 53) auftretenden überein und hat den dort angegebenen Wert. Da im vorliegenden Fall $d>0$ ist, ist dies gerade die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (8. 17).

β) Es sei $b > 0$, $d < 0$, $c > 0$, $a < 0$. Dann ist $k = ga' + hc' < c$, also $k = k_0$. Für die linke Seite der zu beweisenden Formel (8. 17) erhält man dann unter Anwendung von (8. 51) nach geläufigem Umformungsschema sogleich

$$(8.\,56)\quad \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} + \sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[k_0\left|\frac{d}{c}\right|\right]} P_1\left(\frac{c}{d}\nu\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{|c|}\right] - \frac{1}{2}\frac{k_0}{c} - \frac{1}{2}\left[\frac{l}{|b|}\right] - \frac{1}{2}\frac{l_0}{b} - \frac{1}{2}$$

$$+ P_1\left(\frac{l^* - a}{b}\right) + \frac{1}{bd}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{d}R_2\left(-\frac{k^*}{c}\right) + R\left(-\frac{k^*}{c}\right)\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{c} - \frac{1}{2}\frac{l}{b} + \frac{l^* - a}{b}$$

$$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{bd}\cdot\frac{(l+1)(l+2)}{2} - 1.$$

Dieser Ausdruck ohne -1 stimmt mit dem oben in (8. 55) auftretenden überein und hat den dort angegebenen Wert. Da im vorliegenden Fall $b > 0$, $c > 0$, $d < 0$ gilt, stellt der Gesamtausdruck die rechte Seite von (8. 17) dar.

§ 9. Die Kompositionsregel für die Matrixfunktionen $\Phi^*_{gh}(M)$ und $\Phi_{gh}(M)$.

1. Auf Grund der Reduktion (8. 11) hat man nunmehr für die Matrixfunktionen in (7. 13), (7. 14) auch die Darstellungen

$$(9.\,1)\quad \Phi^*_{gh}(M) = \Phi^*_{gh}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{cases} R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \frac{k_0}{c} - \frac{1}{2}\operatorname{sgn} c & \text{für } c \neq 0, \\ R_2\left(\frac{g}{f}\right) b & \text{für } c = 0, \end{cases}$$

$$(9.\,2)\quad \Phi_{gh}(M) = \Phi_{gh}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{cases} R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \frac{k_0}{c} - \frac{1}{2}\operatorname{sgn} c \\ \qquad + \frac{a+d}{6c} - 2\operatorname{sgn} c\cdot s(a,c) & \text{für } c \neq 0, \\ P_2\left(\frac{g}{f}\right) b & \text{für } c = 0. \end{cases}$$

In Hinblick auf (7. 15) und (3. 3) genügt es, die Kompositionsregel (7. 18) für die Matrixfunktion $\Phi^*_{gh}(M)$ zu beweisen.

2. Es seien $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$ zwei ganzzahlige unimodulare Matrizen der Determinante $+1$ aus der Hauptkongruenzgruppe f-ter Stufe $\Gamma(f)$ $(f > 2)$, $M_3 = M_1 M_2$ ihr Produkt, so daß explizit

$$(9.\,3)\qquad M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2, & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2, & c_1b_2 + d_1d_2\end{pmatrix}$$

ist. Dann gilt die folgende, schon in (7. 18) erwähnte, *Kompositionsregel für die Matrixfunktion* $\Phi^*_{gh}(M)$

$$(9.\,4)\qquad \Phi^*_{gh}(M_3) = \Phi^*_{gh}(M_1) + \Phi^*_{gh}(M_2) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(c_1c_2c_3).$$

Beim Beweis dieser Regel nimmt man zweckmäßig die trivialen Fälle vorweg. Sei $c_1 = 0$, $a_1 d_1 = 1$, also $a_1 = d_1 = 1$. Dann ist $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $f \mid b_1$, und man hat gemäß (9. 1)

$$\Phi^*_{gh}(M_1) = R_2\left(\frac{g}{f}\right) b_1.$$

Weiter ist $M_3 = \begin{pmatrix} a_2 + b_1 c_2, & b_2 + b_1 d_2 \\ c_2 \quad , & d_2 \end{pmatrix}$, und man hat gemäß (9. 1)

$$\Phi^*_{gh}(M_3) = \begin{cases} R_2\left(\frac{g}{f}\right) \frac{a_2 + d_2 + b_1 c_2 - 2}{c_2} - 2 \sum\limits_{\mu=1}^{k_{3,0}} P_1\left(\frac{d_2}{c_2}\mu\right) + \frac{k_{3,0}}{c_2} - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} c_2 & \text{für } c_3 = c_2 \neq 0, \\ R_2\left(\frac{g}{f}\right)(b_2 + b_1) & \text{für } c_3 = c_2 = 0,\ a_2 = d_2 = 1. \end{cases}$$

Da $k_3 = g a'_3 + h c'_3 = g a'_2 + h c'_2 + g b'_1 c_2 = k_2 + g b'_1 c_2$ ist und $c_3 = c_2$ gilt, ist offenbar $k_{3,0} = k_{2,0}$. Somit ist in jedem Fall

$$\Phi^*_{gh}(M_3) = \Phi^*_{gh}(M_1) + \Phi^*_{gh}(M_2),$$

wie in (9. 4) behauptet. Analog erledigt sich der Fall $c_2 = 0$.

Sei schließlich $c_3 = c_1 a_2 + d_1 c_2 = 0$. Daraus folgt $d_1 \mid a_2$, $a_2 \mid d_1$, also ist $a_2 = \pm d_1$. Da jedoch $a_2 \equiv d_1 \equiv 1 \bmod f$ gilt, steht hierin wegen $f > 2$ notwendig das Pluszeichen, und wegen $c_3 = 0$ ist überdies $c_2 = -c_1$. Somit hat die Matrix M_2 notwendig die Gestalt

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 \\ -c_1 & d_2 \end{pmatrix} \text{ mit } d_2 \equiv a_1 \bmod c_1,$$

wobei sich die Kongruenz unmittelbar aus den Determinantenbedingungen $|M_1| = |M_2| = 1$ ergibt. Da die Fälle $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ bereits oben erledigt sind, kann im weiteren ohne Einschränkung $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ angenommen werden.

Gemäß (9. 1) ist dann

$$\Phi^*_{gh}(M_1) = R_2\left(\frac{g}{f}\right) \frac{a_1 + d_1 - 2}{c_1} - 2 \sum_{\mu=1}^{k_{1,0}} P_1\left(\frac{d_1}{c_1}\mu\right) + \frac{k_{1,0}}{c_1} - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} c_1$$

und

$$\begin{aligned} \Phi^*_{gh}(M_2) &= R_2\left(\frac{g}{f}\right) \frac{d_1 + d_2 - 2}{-c_1} - 2 \sum_{\mu=1}^{k_{2,0}} P_1\left(-\frac{d_2}{c_1}\mu\right) + \frac{k_{2,0}}{-c_1} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} c_1 \\ &= R_2\left(\frac{g}{f}\right) \frac{d_1 + d_2 - 2}{-c_1} - 2 \sum_{\mu=1}^{k^*_{2,0}} P_1\left(-\frac{d_1}{c_1}\mu\right) + \frac{k^*_{2,0}}{-c_1} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} c_1, \end{aligned}$$

wobei zuletzt die Relation (8. 14) benutzt ist. Nun ist hierin

$$k^*_2 = g d'_2 - h c'_2 = g d'_2 + h c'_1 \equiv g a'_1 + h c'_1 = k_1 \bmod c_1,$$

also $k^*_{2,0} = k_{1,0}$. Auf der anderen Seite errechnet man $b_3 = a_1 b_2 + b_1 d_2$ aus der Determinantenbedingung $d_1 d_2 + c_1 b_2 = 1$ zu

$$b_3 = \frac{a_1 - d_2}{c_1}.$$

Damit wird

$$\Phi^*_{gh}(M_3) = R_2\left(\frac{g}{f}\right) \frac{a_1 - d_2}{c_1} = \Phi^*_{gh}(M_1) + \Phi^*_{gh}(M_2),$$

wie in (9. 4) behauptet.

Sei jetzt $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$. Für den Spezialfall $M_2 = M_1^{-1} = M^{-1}$, also $M_3 = I$ läßt sich nun die Formel (9. 4) sehr einfach beweisen. Laut Definition (9. 1) ist nämlich wegen $M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ unter Berücksichtigung von (8. 14) unmittelbar

$$(9.\,5)\quad \Phi^*_{gh}(M^{-1}) = \begin{cases} R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{-c} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{k_0^*} P_1\left(-\frac{a}{c}\mu\right) + \frac{k_0^*}{-c} - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(-c) \\ \quad = -R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} + 2\sum\limits_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \frac{k_0}{c} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} c \quad \text{für } c \neq 0, \\ -R_2\left(\frac{g}{f}\right) b \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } c = 0. \end{cases}$$

Also hat man $\Phi^*_{gh}(M^{-1}) = -\Phi^*_{gh}(M)$. Andererseits ist offenbar $\Phi^*_{gh}(I) = 0$. Daraus erhellt wegen $c_3 = 0$ sofort die Gültigkeit von (9. 4).

Der Beweis der allgemeinen Kompositionsregel (9. 4) macht bei der hier befolgten rein-arithmetischen Methode eine große Anzahl von Fallunterscheidungen erforderlich und läßt somit die Überlegenheit der in § 7, Nr. 2 geschilderten analytischen Methode deutlich hervortreten. Da ein solcher allgemeiner Beweis zudem mit dem in § 8 für die Reziprozitätsformel (8. 17) gegebenen, zahlreiche Fallunterscheidungen berücksichtigenden Beweis mannigfache Berührungspunkte aufweisen würde, wird es hier genügen, lediglich die zum allgemeinen Beweis hinführenden Hilfsmittel herzuleiten und diese dann an einem formal einfachen, aber schon hinreichend allgemeinen Spezialfall zu erproben. Hierbei ist wesentlich, daß die allgemeine Definitionsformel (9. 1) insgesamt vier verschiedene Darstellungsformen besitzt. Diese erhält man einerseits aus der einfachen Umformungsregel (8. 14), andererseits aus der tiefer liegenden Reziprozitätsformel (8. 17). Danach hat man

$$\begin{aligned}(9.\,6)\quad \Phi^*_{gh}(M) &= R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \frac{k_0}{c} - \frac{1}{2}\operatorname{sgn} c \\ &= R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum_{\mu=1}^{k_0^*} P_1\left(\frac{a}{c}\mu\right) + \frac{k_0^*}{c} - \frac{1}{2}\operatorname{sgn} c \\ &= -R_2\left(\frac{h}{f}\right)\frac{a+d-2}{b} + 2\sum_{\nu=1}^{l_0} P_1\left(\frac{a}{b}\nu\right) - \frac{l_0}{b} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} b \\ &\qquad - \frac{1}{2}\operatorname{sgn} d\,(\operatorname{sgn} b + \operatorname{sgn} c) \\ &= -R_2\left(\frac{h}{f}\right)\frac{a+d-2}{b} + 2\sum_{\nu=1}^{l_0^*} P_1\left(\frac{d}{b}\nu\right) - \frac{l_0^*}{b} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} b \\ &\qquad - \frac{1}{2}\operatorname{sgn} d\,(\operatorname{sgn} b + \operatorname{sgn} c).\end{aligned}$$

Es sei nun $M_3 = M_1 M_2$ die in (9. 3) explizit gegebene Produktmatrix. Dann hat man für die zugeordneten Zahlen k_3, k_3^*, l_3, l_3^* die Zerlegungsformeln

$$(9.\,7)\qquad \begin{cases} k_3 = k_1 a_2 + l_1 c_2 + k_2, & k_3^* = k_1^* + k_2^* d_1 - l_2^* c_1, \\ l_3 = k_1 b_2 + l_1 d_2 + l_2, & l_3^* = l_1^* - k_2^* b_1 + l_2^* a_1, \end{cases}$$

und hierbei bestehen die Kongruenzen

$$(9.\,8)\qquad \begin{cases} d_3(k_1 a_2 + l_1 c_2) \equiv -k_1^* \bmod c_3, & a_3(k_2^* d_1 - l_2^* c_1) \equiv -k_2^* \bmod c_3, \\ a_3(k_1 b_2 + l_1 d_2) \equiv -l_1^* \bmod b_3, & d_3(-k_2^* b_1 + l_2^* a_1) \equiv -l_2 \bmod b_3, \end{cases}$$

die sich leicht aus den Quotientendarstellungen

$$(9.\,9)\quad \begin{cases} \dfrac{d_3}{c_3} = \dfrac{d_2}{c_2} - \dfrac{c_1}{c_2 c_3} = \dfrac{b_2}{a_2} + \dfrac{d_1}{a_2 c_3}, & \dfrac{a_3}{c_3} = \dfrac{a_1}{c_1} - \dfrac{c_2}{c_1 c_3} = \dfrac{b_1}{d_1} + \dfrac{a_2}{d_1 c_3}, \\ \dfrac{a_3}{b_3} = \dfrac{a_2}{b_2} - \dfrac{b_1}{b_2 b_3} = \dfrac{c_2}{d_2} + \dfrac{a_1}{d_2 b_3}, & \dfrac{d_3}{b_3} = \dfrac{d_1}{b_1} - \dfrac{b_2}{b_1 b_3} = \dfrac{c_1}{a_1} + \dfrac{d_2}{a_1 b_3} \end{cases}$$

unter Beachtung von (9. 3) ergeben. Nimmt man nun der Einfachheit halber an, daß k_3, $k_1 a_2 + l_1 c_2$ sowie k_2 sämtlich positiv sind, so zerfällt die in (9. 1) auftretende Summe in zwei Teilsummen:

$$\sum_{\mu=1}^{k_{3,0}} P_1\left(\frac{d_3}{c_3}\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{k_3}{}' P_1\left(\frac{d_3}{c_3}\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{k_1 a_2 + l_1 c_2}{}' P_1\left(\frac{d_3}{c_3}\mu\right) + \sum_{\mu=1}^{k_2}{}' P_1\left(\frac{d_3}{c_3}\mu - \frac{k_1^*}{c_3}\right),$$

letzteres nach (9. 7), (9. 8). Der Strich am Summenzeichen deutet dabei jedesmal an, daß nur über solche $\mu \bmod c_3$ zu summieren ist, die echt-gebrochene Argumente für die Funktion $P_1(x)$ liefern. Für die erste Teilsumme rechts hat man aber gemäß (8. 16) die Umformung

$$\sum_{\mu=1}^{k_1 a_2 + l_1 c_2}{}' P_1\left(\frac{d_3}{c_3}\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{\{-k_1^*\}_{c_3}}{}' P_1\left(\frac{a_3}{c_3}\mu\right) + \frac{1}{2} P_1\left(-\frac{k_1^*}{c_3}\right) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{k_1 a_2 + l_1 c_2}{c_3}\right),$$

wobei $\{-k_1^*\}_{c_3}$ irgendeinen nicht-negativen Rest von $-k_1^* \bmod c_3$ bezeichnet. Trägt man schließlich noch die Werte für die Ausdrücke $\dfrac{d_3}{c_3}$, $\dfrac{a_3}{c_3}$ aus (9. 9) in die beiden fraglichen Teilsummen ein, so ergibt sich die für den Beweis von (9. 4) grundlegende Reduktionsformel

$$(9.\,10)\quad \sum_{\mu=1}^{k_{3,0}} P_1\left(\frac{d_3}{c_3}\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{k_3}{}' P_1\left(\frac{d_3}{c_3}\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{\{-k_1^*\}_{c_3}} P_1\left(\frac{a_1}{c_1}\mu - \frac{c_2}{c_1 c_3}\mu\right)$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{k_2}{}' P_1\left(\frac{d_2}{c_2}\mu - \frac{1}{c_2}\cdot\frac{c_1\mu + k_1^* c_2}{c_3}\right) + \frac{1}{2} P_1\left(-\frac{k_1^*}{c_3}\right) - \frac{1}{2} P_1\left(\frac{k_1 a_2 + l_1 c_2}{c_3}\right),$$

und eine analoge Darstellung erhält man nach demselben Schema auch für die in (9. 6) angeführten anderen drei Summen. Vermöge dieser Formel (9. 10) soll nunmehr, wie angekündigt, der Beweis für die allgemeine Kompositionsregel (9. 4) in dem Fall vollständig erbracht werden, wo sämtliche Elemente der Matrizen M_1 und M_2 positiv sind. Dieser Fall ist hinlänglich allgemein, um an ihm die Grundgedanken des Beweises für beliebige M_1 und M_2 deutlich werden zu lassen.

Nach Voraussetzung ist $c_3 = c_1 a_2 + d_1 c_2 > 0$, ebenso ist $k_3 = k_1 a_2 + l_1 c_2 + k_2$ positiv und die hierin auftretenden Einzelglieder sind jedenfalls sämtlich nicht-negativ. Man kann nun ansetzen

$$k_3 \equiv k_{3,0} = \{k_1\}_{c_1} a_2 + \{l_1\}_{d_1} c_2 + k_2 \bmod c_3,$$

wobei $\{k_1\}_{c_1}$ den kleinsten nicht-negativen Rest mod c_1 und $\{l_1\}_{d_1}$ den kleinsten nicht-negativen Rest mod d_1 bezeichnen. Ist nämlich

$$\begin{aligned} k_1 &= q c_1 + \{k_1\}_{c_1} \quad \text{mit } \{k_1\}_{c_1} = k_{1,0}, \\ l_1 &= q' d_1 + \{l_1\}_{d_1}, \end{aligned}$$

so hat man wegen der Beziehung $k_1 d_1 + g d_1' = l_1 c_1 + h c_1'$ für die größten Ganzen sofort die Gleichheit

$$q = \left[\frac{k_1}{c_1}\right] = \left[\frac{l_1}{d_1}\right] = q'.$$

In Hinblick auf die in den beiden Teilsummen aus (9. 10) durchzuführende Summation werde nun für das Folgende die entscheidende Annahme gemacht, daß der Quotient $\left|\frac{k_1^* c_2}{c_3}\right| \leqq 1$ ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Ungleichung

$$(9.\,11)\qquad \left|\frac{g}{f}\,\frac{d_1-1}{c_1}-\frac{h}{f}\right| \leqq \left|\frac{d_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}\right| = \frac{d_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}$$

besteht.

Sollte diese Annahme nicht zutreffen, so hätte man von der dritten bzw. vierten der in (9. 6) gegebenen Darstellungen auszugehen und für die hierin auftretende fragliche Summe jeweils eine zu (9. 10) analoge Zerlegung in zwei Teilsummen vorzunehmen. Hierbei wäre dann in der Tat die (9. 11) entsprechende Ungleichung

$$\left|\frac{g}{f}-\frac{h}{f}\,\frac{a_1-1}{b_1}\right| \leqq \left|\frac{a_1}{b_1}+\frac{d_2}{b_2}\right| = \frac{a_1}{b_1}+\frac{d_2}{b_2}$$

erfüllt. Die Forderung (9. 11) kann also ohne Einschränkung erhoben werden.

Es sei nun $0 \leqq -k_1^* = hc_1' - gd_1' < c_1 < c_3$. Dann gestattet die erste der in (9. 10) auftretenden Teilsummen die Umformung $(-k_1^* \neq 0)$

$$(9.\,12)\qquad \sum_{\mu=1}^{\{-k_1^*\}_{c_3}}{}' P_1\left(\frac{a_3}{c_3}\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{-k_1^*} P_1\left(\frac{a_1}{c_1}\mu - \frac{c_2}{c_1c_3}\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{-k_1^*} P_1\left(\frac{a_1}{c_1}\mu\right) - \frac{c_2}{c_1c_3}\sum_{\mu=1}^{-k_1^*}\mu$$
$$= \sum_{\mu=1}^{k_{1,0}^*} P_1\left(\frac{a_1}{c_1}\mu\right) + P_1\left(\frac{k_1}{c_1}\right) - \frac{c_2}{c_1c_3}\cdot\frac{-k_1(-k_1^*+1)}{2},$$

letzteres unter Beachtung von $-k_1^* = c_1 - k_{1,0}^*$ durch Summationstransformation aus

$$\sum_{\mu=1}^{c_1-1} P_1\left(\frac{a_1}{c_1}\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{c_1-k_{1,0}^*} P\left(\frac{a_1}{c_1}\mu\right) + \sum_{\mu=c_1-k_{1,0}^*+1}^{c_1-1} P_1\left(\frac{a_1}{c_1}\mu\right) = 0,$$

sowie unter Berücksichtigung von $P_1\left(\frac{a_1}{c_1}k_{1,0}^*\right) = P_1\left(-\frac{k_1}{c_1}\right)$. Für $-k_1^* = 0$ dagegen ist die Summe in (9. 12) leer, was im Endergebnis besonders zu beachten ist.

Ist dagegen $0 < k_1^* = gd_1' - hc_1' < c_3$, so hat man $\{-k_1^*\}_{c_3} = c_3 - k_1^*$, und es gilt ähnlich wie eben die Umformung

$$(9.\,13)\qquad \sum_{\mu=1}^{\{-k_1^*\}_{c_3}} P_1\left(\frac{a_3}{c_3}\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{k_1^*} P_1\left(\frac{a_3}{c_3}\mu\right) - P_1\left(\frac{a_3}{c_3}k_1^*\right)$$
$$= \sum_{\mu=1}^{k_1^*} P_1\left(\frac{a_1}{c_1}\mu - \frac{c_2}{c_1c_3}\mu\right) - P_1\left(\frac{a_1}{c_1}k_1^* - \frac{1}{c_1}\cdot\frac{k_1^*c_2}{c_3}\right)$$
$$= \sum_{\mu=1}^{k_1^*}{}' P_1\left(\frac{a_1}{c_1}\mu\right) - \frac{c_2}{c_1c_3}\sum_{\mu=1}^{k_1^*}\mu + \frac{1}{2}\left[\frac{k_1}{c_1}\right] - P_1\left(\frac{a_1}{c_1}k_1^*\right) + \frac{c_2}{c_1c_3}k_1^*$$
$$= \sum_{\mu=1}^{k_{1,0}^*} P_1\left(\frac{a_1}{c_1}\mu\right) - \frac{1}{2}P_1\left(\frac{k_1^*}{c_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{k_1^*}{c_1} - \frac{1}{4} + P_1\left(\frac{k_1}{c_1}\right) - \frac{c_2}{c_1c_3}\cdot\frac{k_1^*(k_1^*-1)}{2}.$$

Man erkennt, daß die Umformung in (9. 12) und (9. 13) zu demselben Ergebnis geführt hat, da der in (9. 12) fehlende dreigliedrige Ausdruck $-\frac{1}{2}P_1\left(\frac{k_1^*}{c_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{k_1^*}{c_1} - \frac{1}{4}$ dort gleich 0 ist.

Die zweite der in (9. 10) auftretenden Teilsummen gestattet schließlich die Umformung

$$(9.\,14)\quad \sum_{\mu=1}^{k_2} P_1\left(\frac{d_3}{c_3}\mu - \frac{k_1^*}{c_3}\right) = \sum_{\mu=1}^{k_2} P_1\left(\frac{d_2}{c_2}\mu - \frac{1}{c_2}\cdot\frac{c_1\mu + k_1^* c_2}{c_3}\right)$$

$$= \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\not\equiv 0 \bmod c_2}}^{k_2}{}' P_1\left(\frac{d_2}{c_2}\mu\right) - \frac{1}{c_2 c_3}\sum_{\mu=1}^{k_2}(c_1\mu + k_1^* c_2) + \frac{1}{2}\left[\frac{k_2}{c_2}\right]$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k_{2,0}} P_1\left(\frac{d_2}{c_2}\mu\right) - \frac{1}{2}P_1\left(\frac{k_2}{c_2}\right) + \frac{1}{2}\frac{k_2}{c_2} - \frac{1}{4} - \frac{c_1}{c_2 c_3}\cdot\frac{k_2(k_2+1)}{2} - \frac{k_1^* k_2}{c_3}.$$

Trägt man nunmehr die in (9. 12) bzw. (9. 13) und (9. 14) erhaltenen Summenwerte in (9. 10) ein, so ergibt sich durch einfache Ausrechnung der trivialen Glieder hierin, daß auf Grund der expliziten Formeln in (9. 6) die linke Seite der behaupteten Relation (9. 4) mit der rechten Seite in der Tat übereinstimmt.

§ 10. Die Transformationsformel für die Funktionen $\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}$ bei Modulsubstitutionen aus der Hauptkongruenzgruppe f-ter Stufe.

1. Es sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige ganzzahlige unimodulare Matrix aus der Hauptkongruenzgruppe f-ter Stufe $\Gamma(f)$ mit der Determinante $|M| = +1$. Dann gilt für die normierten Kleinschen σ^*-Teilwerte in (7. 3) nach (7. 13), (7. 16), (9. 1) die *Transformationsformel*

$$(10.\,1)\quad \frac{\sigma_{gh}\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sigma_{gh}\binom{\omega_1}{\omega_2}} = \begin{cases} \exp\left\{\pi i\left(R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \frac{k_0}{c}\right)\right\} & \text{für } c \neq 0, \\ \exp\left\{\pi i R_2\left(\frac{g}{f}\right) b\right\} & \text{für } c = 0. \end{cases}$$

Nach der allgemeinen Theorie sind die rechts stehenden komplexen Multiplikatoren

$$(10.\,2)\quad v_{gh}(M) = v_{gh}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \exp\left\{\pi i\left(R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \frac{k_0}{c}\right)\right\} & \text{für } c \neq 0, \\ \exp\left\{\pi i R_2\left(\frac{g}{f}\right) b\right\} & \text{für } c = 0 \end{cases}$$

$(2f)$-te Einheitswurzeln und im Fall eines ungeraden Teilungsgrades f sogar bereits f-te Einheitswurzeln. Es entsteht somit die Aufgabe, dieses Ergebnis auf Grund der gewonnenen expliziten Formel (10. 2) direkt festzustellen.

2. Für den trivialen Fall $c = 0$ ist diese Aussage evident, da definitionsgemäß $R_2\left(\frac{g}{f}\right) b = \frac{g}{f}\left(\frac{g}{f} - 1\right) b = \frac{g}{f}(g - f)\frac{b}{f}$ ist und dabei voraussetzungsgemäß $f \mid b$ gilt. Im nicht-trivialen Fall $c \neq 0$ erfordert der entsprechende Nachweis eine kleine Rechnung.

Auf den in (10. 2) auftretenden rationalen Exponenten kommt es offenbar $\bmod^+ 2$ an. Man hat dann hierfür der Reihe nach die Umgestaltungen

$$R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \frac{k_0}{c}$$

$$= R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum_{\mu=1}^{k} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) - \left[\frac{k}{|c|}\right] + \frac{k}{c} - \operatorname{sgn} c\left[\frac{k}{|c|}\right],$$

$$\text{wenn } k = \left[\frac{k}{|c|}\right]|c| + k_0,\ k \geqq 0,$$

$$= R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum_{\mu=1}^{k}\left(\frac{d}{c}\mu - \frac{1}{2}\right) + \frac{k}{c}$$

$$= R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\frac{d}{c}\frac{k(k+1)}{2} + k + \frac{k}{c} \bmod^+ 2.$$

Trägt man hierin den expliziten Wert $k = ga' + hc'$ ein, so erhält man endlich, was auch für $k < 0$ richtig ist,

$$R_2\left(\frac{g}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum_{\mu=1}^{k_0} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \frac{k_0}{c}$$

$$= \left(\frac{g}{f}\right)^2 b - 2\frac{g}{f}\cdot\frac{h}{f}(a-1) - \left(\frac{h}{f}\right)^2 c - 2\frac{g}{f}\cdot\frac{h}{f}(a-1)(d-1) - \left(\frac{g}{f}\right)^2(a-1)b -$$

$$-\left(\frac{h}{f}\right)^2(d-1)c + \frac{g}{f}(a-1) - \frac{g}{f}b + \frac{h}{f}c - \frac{h}{f}(d-1)$$

$$= \frac{1}{f^2}(g^2 b + (d-a)gh - h^2 c) + \left(g\frac{a-1}{f} + h\frac{c}{f} + 1\right)\left(g\frac{b}{f} + h\frac{d-1}{f} + 1\right) - 1 \bmod^+ 2.$$

Damit ergibt sich die aus der Theorie wohlbekannte, offenbar auch für $c = 0$ gültige explizite Darstellung für die Multiplikatoren $v_{gh}(M)$ (Fricke [4], Klein-Fricke [9])

$$(10.3)\qquad v_{gh}(M) = v_{gh}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= -(-1)^{\left(g\frac{a-1}{f} + h\frac{c}{f} + 1\right)\left(g\frac{b}{f} + h\frac{d-1}{f} + 1\right)} \cdot e^{\frac{2\pi i}{2f^2}(g^2 b + (d-a)gh - h^2 c)}.$$

Hierdurch ist in Evidenz gesetzt, daß die Multiplikatoren $(2f)$-te Einheitswurzeln sind, und man liest hieraus genauer ab, daß es sich im Fall eines ungeraden Teilungsgrades f bereits um f-te Einheitswurzeln handelt.

§ 11. Strahlklasseninvarianten mod $\mathfrak{f}p_\infty$ über einem reell-quadratischen Zahlkörper.

1. Es sei Ω ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d_\Omega > 0$, ferner $\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}p_\infty$ mit $\mathfrak{f} \neq 1$ ein ganzer Divisor von Ω und $\Omega_{\tilde{\mathfrak{f}}}$ der *Zahlstrahl* mod $\tilde{\mathfrak{f}}$ *in* Ω. Definitionsgemäß besteht $\Omega_{\tilde{\mathfrak{f}}}$ aus allen denjenigen (zu $\mathfrak{f}$ primen) Zahlen aus Ω mit positiver Norm, deren Kongruenzwert mod $\mathfrak{f}$ gleich 1 ist. Diese Zahlgruppe $\Omega_{\tilde{\mathfrak{f}}}$ bildet die Hauptklasse einer Einteilung aller zu $\mathfrak{f}$ primen Divisoren von Ω. Diese *Hauptstrahlklasse* mod $\tilde{\mathfrak{f}}$ besteht dann also aus allen (zu $\mathfrak{f}$ primen) Hauptdivisoren (α) mit den Eigenschaften

$$(11.1)\qquad \begin{cases} \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{f} \\ \alpha \equiv \pm 1 \bmod p_\infty \end{cases},$$

bei geeigneter Normierung von α unter Assoziierten, und die Divisorenklassen nach ihr bilden die *Strahlklassen* mod $\mathfrak{f}p_\infty$.

2. Es bezeichne $\mathfrak{k}$ eine feste Strahlklasse mod $\mathfrak{f}p_\infty$, die in der absoluten Klasse im engeren Sinne $\mathfrak{K}^{+-1}$ von Ω enthalten ist. Es seien dann gewählt:

in $\mathfrak{K}^+$ ein beliebiger Vertreter $\mathfrak{c}$;

in $\mathfrak{k}$ ein ganzer Vertreter $\mathfrak{r}$, mit zugeordneter Zahl $\mathfrak{r}\mathfrak{c} \cong \varrho$, die noch zu $N(\varrho) > 0$ normiert werden kann.

Hierbei gilt $\varrho \not\equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c}\mathfrak{f}$, da die Bedingung $(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}) = 1$ besteht und $\mathfrak{f} \neq 1$ vorausgesetzt ist. Es bezeichne ferner $v(\alpha)$ mod p_∞ den zur Klasseneinteilung gehörigen Vorzeichencharakter, explizit gegeben durch $v(\alpha) = \operatorname{sgn} N(\alpha)$ für Zahlen α aus Ω. Dann ist die *L-Funktion der Strahlklasse* $\mathfrak{k}$ mod $\mathfrak{f}p_\infty$ durch die für $\Re(s) > 1$ absolut-konvergente Dirichletsche Reihe

$$(11.2)\qquad L(s \mid \mathfrak{k}) = L(s \mid \mathfrak{c}, \varrho, v) = \Re(\mathfrak{c})^s \sum_{\gamma \equiv \varrho \bmod^+ \mathfrak{c}\mathfrak{f}}^{*} \frac{\operatorname{sgn} N(\gamma)}{\Re(\gamma)^s}$$

invariant definiert. Dabei deutet der Stern am Summenzeichen an, daß die Summation nur über ein volles System nicht durch (normpositive) Einheiten aus $\Omega_{\mathfrak{f}}$ assoziierter Zahlen γ mit den angegebenen Eigenschaften zu erstrecken ist.

Es sei nun $\eta_{\mathfrak{f}} \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$ die normpositive Grundeinheit von $\Omega_{\mathfrak{f}}$. Dann besteht für die L-Funktion der Strahlklasse $\mathfrak{k} \bmod \mathfrak{f}p_\infty$ in (11. 2), unter Anwendung der in § 6, Nr. 2 eingeführten Bezeichnungsweise, die fundamentale invariante Integraldarstellung (Hecke [8], Meyer [15])

$$(11.3)\quad L(s\,|\,\mathfrak{k}) = -\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2}\cdot\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{c})^{s-1}}{\mathfrak{N}(\mathfrak{f})\sqrt{d_\Omega}}\,\Im\int_1^{|\eta_{\mathfrak{f}}|}\sum_{\gamma\equiv\varrho \bmod^+ \mathfrak{c}\mathfrak{f}}\frac{|\,\delta(\mathfrak{c}(x))\,|\cdot\gamma(x)^2}{\mathfrak{N}(\gamma(x))^{s+1}}\,d\log x.$$

Dabei bedeutet gemäß (6. 5) $\delta(\mathfrak{c}(x))$ die Basisdeterminante desjenigen komplexen Moduls, der dem Vielfachenideal $(\mathfrak{c})$ des Divisors $\mathfrak{c}$ von Ω eindeutig zugeordnet ist. Diese Formel läßt sich so umgestalten, daß statt über die Zahlen einer Restklasse $\gamma \equiv \varrho \bmod^+ \mathfrak{c}\mathfrak{f}$ über alle Zahlen $\gamma \equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c}$ (außer 0) summiert wird. Durch Einfügung einer gewissen $(\mathfrak{N}(\mathfrak{f})-1)$-gliedrigen Einheitswurzelsumme erhält man dann aus (11. 3) auch (Meyer [15])

$$(11.4)\qquad L(s\,|\,\mathfrak{k}) = -\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2}\cdot\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{c})^{s-1}}{\mathfrak{N}(\mathfrak{f})\sqrt{d_\Omega}}\sum_{\substack{\nu \bmod^+ \mathfrak{c}\\ \nu\equiv 0 \bmod^+ \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{f}^\mathfrak{r}}\\ \nu\neq 0}}{}' e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\nu'}{\delta(\mathfrak{c})}\right)}$$

$$\times\,\Im\int_1^{|\eta_{\mathfrak{f}}|}\left(\sum_{\gamma(x)\equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c}(x)}{}'\frac{|\,\delta(\mathfrak{c}(x))\,|\cdot\gamma(x)^2 e^{2\pi i S\left(\frac{\gamma(x)\,\overline{\nu(x)}}{\delta(\mathfrak{c}(x))}\right)}}{\mathfrak{N}(\gamma(x))^{s+1}} - \sum_{\gamma(x)\equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c}(x)}{}'\frac{|\,\delta(\mathfrak{c}(x))\,|\cdot\gamma(x)^2}{\mathfrak{N}(\gamma(x))^{s+1}}\right)d\log x,$$

worin nunmehr jeweils die Summation über alle von Null verschiedenen $\gamma(x) \equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c}(x)$ d. h. $\gamma \equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c}$ zu erstrecken ist.

Man führe nun eine Basis des Ideals $(\mathfrak{c})$ ein, dessen Determinante $\delta(\mathfrak{c}) > 0$ ist. Bei dieser Normierung erhält man dann durch Anwendung des Poissonschen Summationsverfahrens für ein einzelnes Glied des Integranden in (11. 4) die Entwicklung (Meyer [15])

$$(11.5)\quad \sum_{\gamma(x)\equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c}(x)}{}'\frac{|\,\delta(\mathfrak{c}(x))\,|\cdot\gamma(x)^2 e^{2\pi i S\left(\frac{\gamma(x)\,\overline{\nu(x)}}{\delta(\mathfrak{c}(x))}\right)}}{\mathfrak{N}(\gamma(x))^{s+1}} - \sum_{\gamma(x)\equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{c}(x)}{}'\frac{|\,\delta(\mathfrak{c}(x))\,|\cdot\gamma(x)^2}{\mathfrak{N}(\gamma(x))^{s+1}}$$

$$= 2\pi\frac{\gamma_2(x)}{\gamma_2(x)} - 4\pi^2\Im(\tau(x))\frac{\gamma_2(x)}{\gamma_2(x)}\left(\frac{n_1}{f}-\frac{n_1^2}{f^2}\right) + 4\pi i\Im(\tau(x))\frac{\gamma_2(x)}{\gamma_2(x)}$$

$$\times\frac{d}{d\tau(x)}\log\frac{\prod_{m=0}^{\infty}\left(1-e^{-\frac{2\pi i n_2}{f}}e^{-2\pi i\left(m+\frac{n_1}{f}\right)\overline{\tau(x)}}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{\frac{2\pi i m_2}{f}}e^{-2\pi i\left(m-\frac{n_1}{f}\right)\overline{\tau(x)}}\right)}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{-2\pi i m\overline{\tau(x)}}\right)^2} + O(s-1),$$

mit den Bezeichnungen $(\mathfrak{c}) = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$, $\mathfrak{c}(x) = \begin{pmatrix}\gamma_1(x)\\ \gamma_2(x)\end{pmatrix}$, wobei der Basisquotient $\tau(x) = \frac{\gamma_1(x)}{\gamma_2(x)}$ einen positiven Imaginärteil hat. Ferner ist

$$\nu(x) = \frac{n_1}{f}\gamma_1(x) + \frac{n_2^0}{f_0}\gamma_2(x) = \frac{n_1}{f}\gamma_1(x) + \frac{n_2}{f}\gamma_2(x)$$

angesetzt, wo f das kleinste natürliche Vielfache von $\mathfrak{f}$ und f_0 mit $f_0 | f$ den größten natürlichen Teiler von $\mathfrak{f}$ bedeuten. Es zeigt sich, daß der obige Ausdruck rechts logarithmisch nach x integrierbar ist. Die Ausführung der Integration liefert dann für die Funktion $L(s\,|\,\mathfrak{k})$ selbst in (11. 4) die folgende Grenzformel in nicht-invarianter, inhomogener Gestalt:

$$(11.6)\qquad L(s\,|\,\mathfrak{k}) = \frac{2\pi}{\mathfrak{N}(\mathfrak{f})\sqrt{d_\Omega}} \sum_{\substack{\nu \bmod + \mathfrak{c} \\ \nu \equiv \mathfrak{f}\,0 \bmod + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{f}^\tau} \\ \nu \neq 0}}{}' e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\nu^\tau}{\delta(\mathfrak{c})}\right)}$$

$$\times\, \mathfrak{J}\left[\log \gamma_2(x)\, \frac{e^{\pi i \frac{n_1}{f}\left(\frac{n_1}{f}-1\right)\tau(x)} \prod\limits_{m=0}^{\infty}\left(1 - e^{2\pi i \frac{n_2}{f}} e^{2\pi i\left(m+\frac{n_1}{f}\right)\tau(x)}\right) \prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1 - e^{-2\pi i \frac{n_2}{f}} e^{2\pi i\left(m-\frac{n_1}{f}\right)\tau(x)}\right)}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1 - e^{2\pi i m \tau(x)}\right)^2}\right]_{x=1}^{x=|\eta_\mathfrak{f}|}$$

$$+\, O(s-1),$$

und hieraus erhält man sofort unter Beachtung von (7. 3) die für beliebige Basen $\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$ des Ideals $(\mathfrak{c})$ gültige Grenzformel in invarianter, homogener Gestalt:

$$(11.7)\qquad L(s\,|\,\mathfrak{k}) = \frac{2\pi}{\mathfrak{N}(\mathfrak{f})\sqrt{d_\Omega}} \sum_{\substack{\nu \bmod + \mathfrak{c} \\ \nu \equiv 0 \bmod + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{f}^\tau} \\ \nu \neq 0}}{}' e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\nu^\tau}{\delta(\mathfrak{c})}\right)} \mathfrak{J}\left[\log \sigma^*\left(\nu(x)\,\middle|\,\begin{matrix}\gamma_1(x)\\ \gamma_2(x)\end{matrix}\right)\right]_{x=1}^{x=|\eta_\mathfrak{f}|} + O(s-1).$$

Zwecks Vermeidung von Fallunterscheidungen und zur Erzielung einheitlicher Formeln sei von nun ab die normpositive Grundeinheit $\eta_\mathfrak{f}$ von $\Omega_\mathfrak{f}$ als total-positiv vorausgesetzt (für den anderen Fall vgl. Meyer [15]). Dann hängen in (11. 7) die Argumentwerte für die obere und die untere Integrationsgrenze durch eine Modulsubstitution M der Determinante $+1$ zusammen:

$$\begin{pmatrix}\gamma_1(\eta_\mathfrak{f})\\ \gamma_2(\eta_\mathfrak{f})\end{pmatrix} = M \begin{pmatrix}\gamma_1(1)\\ \gamma_2(1)\end{pmatrix}.$$

Die ganzzahligen Koeffizienten der Substitution $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ bestimmen sich dabei aus der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\eta_\mathfrak{f} & \gamma_1^\tau\eta_\mathfrak{f}^\tau\\ \gamma_2\eta_\mathfrak{f} & \gamma_2^\tau\eta_\mathfrak{f}^\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_1^\tau\\ \gamma_2 & \gamma_2^\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_\mathfrak{f} & 0\\ 0 & \eta_\mathfrak{f}^\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_1^\tau\\ \gamma_2 & \gamma_2^\tau\end{pmatrix}$$

$$\text{mit } |\,M\,| = \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = N(\eta_\mathfrak{f}) = +1$$

und haben die expliziten Werte

$$(11.8)\qquad \begin{cases} a = S\left(\dfrac{\gamma_1\gamma_2^\tau\eta_\mathfrak{f}}{\delta(\mathfrak{c})}\right), & b = S\left(\dfrac{\gamma_1\gamma_1^\tau\eta_\mathfrak{f}^\tau}{\delta(\mathfrak{c})}\right),\\ c = S\left(\dfrac{\gamma_2\gamma_2^\tau\eta_\mathfrak{f}}{\delta(\mathfrak{c})}\right), & d = S\left(\dfrac{\gamma_1\gamma_2^\tau\eta_\mathfrak{f}^\tau}{\delta(\mathfrak{c})}\right);\end{cases}$$

dabei bedeutet das Zeichen S die Spurbildung in Ω.

Führt man statt des mit dem Ideal $(\mathfrak{c}) = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$ gebildeten Moduls $\mathfrak{c}(x) = \begin{pmatrix}\gamma_1(x)\\ \gamma_2(x)\end{pmatrix}$ irgendeinen zweigliedrigen, nur der Bedingung $\operatorname{sgn}\dfrac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i} = \operatorname{sgn}\delta(\mathfrak{c})$ unterworfenen komplexen Modul $\mathfrak{w} = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ ein, so erhält man aus (11. 7) nunmehr die sogenannte *implizite Kroneckersche Grenzformel für die L-Funktion der Strahlklasse* $\mathfrak{k} \bmod \mathfrak{f}p_\infty$ (Meyer [15])

$$(11.9)\quad L(s\,|\,\mathfrak{k}) = \frac{2\pi}{\mathfrak{N}(\mathfrak{f})\sqrt{d_\Omega}} \sum_{\substack{\nu \bmod + \mathfrak{c} \\ \nu \equiv 0 \bmod + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{f}^\tau} \\ \nu \neq 0}}{}' e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\nu^\tau}{\delta(\mathfrak{c})}\right)} \Im\left(\log \frac{\sigma_{n_1, n_2}\left(M\binom{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\sigma_{n_1, n_2}\binom{\omega_1}{\omega_2}}\right) + O(s-1)$$

$$\text{mit } \operatorname{sgn} \frac{\delta\binom{\omega_1}{\omega_2}}{2i} = \operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c});$$

dabei ist, wie immer schon, abkürzend $\sigma^*\left(\frac{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}{f}\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right) = \sigma_{n_1, n_2}\binom{\omega_1}{\omega_2}$ gesetzt.

Setzt man die Teilerfremdheitsbedingung $(\mathfrak{f}, \sqrt{d_\Omega}) = 1$ voraus, was im folgenden geschehen soll, so entnimmt man der expliziten Darstellung (11. 8), daß M zu $\Gamma(f)$ gehört. Der andere Fall $(\mathfrak{f}, \sqrt{d_\Omega}) \neq 1$ ist lediglich arithmetisch, keineswegs jedoch funktionentheoretisch gegenüber dem ersteren ausgezeichnet; hier gehört dann M einer gewissen Kongruenzobergruppe von $\Gamma(f)$ an (Meyer [15]). Im ersteren, weiter zu betrachtenden Fall ergibt sich dann nach (7. 5) aus (11. 9) schließlich die *explizite Kroneckersche Grenzformel für die L-Funktion der Strahlklasse* $\mathfrak{k} \bmod \mathfrak{f}p_\infty$ *in einem reell-quadratischen Zahlkörper* (Meyer [15])

$$(11.10)\quad L(s\,|\,\mathfrak{k}) = \frac{2\pi}{\mathfrak{N}(\mathfrak{f})\sqrt{d_\Omega}} \operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}) \cdot \sum_{\substack{\nu \bmod + \mathfrak{c} \\ \nu \equiv 0 \bmod + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{f}^\tau} \\ \nu \neq 0}}{}' e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\nu^\tau}{\delta(\mathfrak{c})}\right)}$$

$$\times \left(P_2\left(\frac{n_1}{f}\right)\frac{a+d}{c} - 2\operatorname{sgn} c \cdot s_{n_1, n_2}(a, c) - \frac{a+d}{6c} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} c + 2\operatorname{sgn} c \cdot s(a, c)\right) + O(s-1)$$

$$= \frac{2\pi}{\mathfrak{N}(\mathfrak{f})\sqrt{d_\Omega}} \operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c}) \cdot \sum_{\substack{\nu \bmod + \mathfrak{c} \\ \nu \equiv 0 \bmod + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{f}^\tau} \\ \nu \neq 0}}{}' e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\nu^\tau}{\delta(\mathfrak{c})}\right)}$$

$$\times \left(R_2\left(\frac{n_1}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum_{\mu=1}^{k_{n_1, n_2; 0}} P_1\left(\frac{d}{c}\mu + \frac{k_{n_1, n_2; 0}}{c}\right)\right) + O(s-1),$$

wobei sich die letztere Darstellung auf Grund der Reduktion (8. 11) der allgemeinen Dedekindschen Summen ergibt. Hierin haben die Koeffizienten der unimodularen Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die in (11. 8) bezeichneten expliziten Werte. Dabei ist zu beachten, daß der Koeffizient c wirklich von Null verschieden ist, da die Strahleinheit $\eta_{\mathfrak{f}}$ eine echte reell-quadratische Irrationalität ist.

Setzt man nun abkürzend

$$(11.11)\quad \Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_1(\nu\,|\,\mathfrak{c}) = \Psi^*_{n_1, n_2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c})\left(R_2\left(\frac{n_1}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum_{\mu=1}^{k_{n_1, n_2; 0}} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \frac{k_{n_1, n_2; 0}}{c}\right)$$

sowie auch, dem Auftreten dieser Größen in den arithmetischen Klassenzahlformeln entsprechend,

$$(11.12)\quad \Psi^{\eta_{\mathfrak{f}}}_1(\nu\,|\,\mathfrak{c}) = \Psi_{n_1, n_2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \operatorname{sgn} \delta(\mathfrak{c})\left(P_2\left(\frac{n_1}{f}\right)\frac{a+d}{c} - 2\operatorname{sgn} c \cdot s_{n_1, n_2}(a, c)\right),$$

so sind die beiden rationalzahligen Ausdrücke $\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_1(\nu\,|\,\mathfrak{c})$, $\Psi^{\eta_{\mathfrak{f}}}_1(\nu\,|\,\mathfrak{c})$ *Strahlklasseninvarianten* $\bmod \mathfrak{f}p_\infty$ der durch die Zahlrepräsentanten ν vertretenen Strahlklassen $\bmod \mathfrak{f}p_\infty$. Im einzelnen gilt:

1. Der Wert $\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$ hängt nur vom Ideal $(\mathfrak{c})$, nicht aber von einer speziellen Basis des Ideals ab.
2. Der Wert $\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$ hängt nur von der Restklasse $\nu \bmod^{+} \mathfrak{c}$ ab.
3. Es ist $\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\lambda\nu|\lambda\mathfrak{c}) = \operatorname{sgn} N(\lambda)\cdot\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$ für beliebige Multiplikatoren $\lambda \neq 0$ aus Ω, so daß speziell gilt
$$\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\varepsilon\nu|\mathfrak{c}) = \operatorname{sgn} N(\varepsilon)\cdot\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$$
für beliebige Einheiten ε aus Ω.
4. Konjugierten Zahlen ν, ν^{τ} und Divisoren $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}^{\tau}$ von Ω ist derselbe Wert zugeordnet:
$$\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c}) = \Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu^{\tau}|\mathfrak{c}^{\tau}).$$

Diesen Invarianzeigenschaften der Zahlen $\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$ tritt noch die folgende Kovarianzeigenschaft zur Seite:

5. Ersetzt man $\eta_{\mathfrak{f}}$ durch $\eta_{\mathfrak{f}}^{k}$, so gilt $\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}^{k}}_{1}(\nu|\mathfrak{c}) = k\cdot\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$, und es ist also der Wert $\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$ durch den Wert $\frac{1}{k}\,\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}^{k}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$ zu ersetzen.

Diese Invarianz- und Kovarianzeigenschaften der Zahlen $\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$, und ebenso natürlich auch der Zahlen $\Psi^{\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$, sind zufolge dem Auftreten in der Kroneckerschen Grenzformel (11. 10) und nach der Herleitung dieser Grenzformel aus den invarianten Definitionsgleichungen (11. 2) und (11. 4) für die Klassenfunktion $L(s|\mathfrak{f})$ ohne weiteres klar. Man kann nun aber mit Hecke [8] auch die Aufgabe stellen, die genannten Eigenschaften der elementar-arithmetischen Ausdrücke $\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$ sowie $\Psi^{\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$, ohne Berufung auf die funktionentheoretische Herleitung, an diesen Rechenausdrücken selbst nachzuweisen. Während dieser direkte Nachweis für die Invarianzeigenschaften 2, 3 und 4 auf Grund der in die Formel eingehenden Definitionen beinahe auf der Hand liegt oder nur eine einfache Rechnung erfordert, sind die Eigenschaften 1 und 5 keineswegs unmittelbar einsichtig. Vielmehr hat man hier die früher hergeleiteten arithmetischen Eigenschaften der allgemeinen Dedekindschen Summen, insbesondere das Reziprozitätsgesetz für diese Summen und die Kompositionsregel für die Matrixfunktion $\Phi^{*}_{gh}(M)$ beim Beweis heranzuziehen.

3. Bei den direkten Beweisen der Regeln 1 und 5 kann man sich nun sehr kurz fassen, da sie in völlig analoger Weise zum Fall der Ringklassen in § 6 erbracht werden.

Der Nachweis für die unter 1 behauptete Basisinvarianz der Zahlen $\Psi^{*\eta_{\mathfrak{f}}}_{1}(\nu|\mathfrak{c})$ läuft darauf hinaus zu zeigen, daß, in der Bezeichnungsweise (11. 11), stets

$$(11.\,13)\qquad \Psi^{*}_{n_1,n_2}(\widetilde{M}) = \Psi^{*}_{n_1,n_2}(M) \quad \text{für } \widetilde{M} = AMA^{-1} \text{ mit } |A| = \pm 1$$

gilt, wo A eine beliebige Matrix aus der weiteren Modulgruppe bezeichnet. Wie in § 6 genügt es, den Beweis für die beiden speziellen Erzeugenden $S = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ der engeren Modulgruppe in der Rolle der unimodularen Matrix A zu führen.

Es ist
$$\widetilde{M} = SMS^{-1} = \begin{pmatrix}a+c & b-a+d-c\\ c & d-c\end{pmatrix}.$$

Damit wird
$$\Psi^{*}_{n_1,n_2}(\widetilde{M}) = \operatorname{sgn}\delta(\mathfrak{c})\left(R_2\left(\frac{n_1}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum_{\mu=1}^{k_{n_1,n_2;0}} P_1\left(\frac{d-c}{c}\mu\right) + \frac{k_{n_1,n_2;0}}{c}\right)$$
$$= \operatorname{sgn}\delta(\mathfrak{c})\left(R_2\left(\frac{n_1}{f}\right)\frac{a+d-2}{c} - 2\sum_{\mu=1}^{k_{n_1,n_2;0}} P_1\left(\frac{d}{c}\mu\right) + \frac{k_{n_1,n_2;0}}{c}\right) = \Psi^{*}_{n_1,n_2}(M).$$

Analog zeigt man, daß auch $\Psi^{*}_{n_1,n_2}(S^{-1}MS) = \Psi^{*}_{n_1,n_2}(M)$ ist.

Für die andere Erzeugende T ist die obige Behauptung gerade die Aussage der Reziprozitätsformel (7. 12) im Verein mit der Tatsache, daß die beiden Koeffizienten a und d der Matrix M nicht gleichzeitig negativ sein können, da ja, wie in § 6 ausgeführt, $S(M) = S(\eta_{\mathfrak{f}}) = a + d \geqq 3$ gilt.

Der Beweis für die Kovarianzregel 5 schließlich stützt sich, genau wie in § 6, auf die Kompositionsregel für die Matrixfunktion $\Phi^*_{gh}(M)$ sowie auf die eben genannte Tatsache, daß $a + d \geqq 3$ ist. Er kann daher hier unterbleiben.

Literaturverzeichnis.

[1] *P. Bachmann*, Niedere Zahlentheorie. I, Leipzig (1902).

[2] *R. Dedekind*, Erläuterungen zu den vorstehenden Fragmenten (zu *B. Riemann*, Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen). Riemanns Werke, 2. Aufl., 466—478 = Dedekinds Werke **1**, 159—172.

[3] *G. Eisenstein*, Aufgaben und Lehrsätze (Théorèmes arithmétiques). Journ. f. d. reine u. angew. Math. **27** (1844), 86—88.

[4] *R. Fricke*, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. I, Leipzig-Berlin (1930).

[5] *G. Frobenius*, Über das quadratische Reziprozitätsgesetz. I. II. Sitzungsberichte d. preuß. Akad. d. Wiss. Berlin (1914), 335—349, 484—488.

[6] *C. F. Gauß*, Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{etc.}$$

Gauß' Werke **3**, 123—162 (oder auch in deutscher Übersetzung von H. Simon, Berlin (1888)).

[7] *C. F. Gauß*, Gauß' Werke **2**, 1—8.

[8] *E. Hecke*, Bestimmung der Klassenzahl einer neuen Reihe von algebraischen Zahlkörpern. Göttinger Nachr. 1921, 1—23.

[9] *F. Klein—R. Fricke*, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. II, Leipzig (1892).

[10] *M. Lerch*, Zur Theorie des Fermatschen Quotienten $\frac{a^{p-1}-1}{p} \equiv q(a)$. Math. Ann. **60** (1905), 471—490.

[11] *M. Lerch*, Sur un théorème arithmétique de Zolotarev. Bull. intern. **3**, Prague (1896).

[12] *F. Lösch—F. Schoblik*, Die Fakultät. Leipzig (1951).

[13] *W. Maier*, Aufgabe 326 aus dem Jahresbericht D. M. V. **53**, 2. Abt. (1943), *34*.

[14] *HJ. Mellin*, Bemerkungen im Anschluß an den Beweis eines Satzes von Hardy über die Zetafunktion. Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Ser. A, **11**, Nr. 3 (1917).

[15] *C. Meyer*, Die Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern. Monographie Berlin (1957).

[16] *Th. Molien*, Über gewisse, in der Theorie der elliptischen Funktionen auftretende Einheitswurzeln. Ber. sächs. Akad. d. Wiss. Leipzig (1885), 25—38.

[17] *N. Nielsen*, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig (1906).

[18] *H. Rademacher*, Zur Theorie der Modulfunktionen. Journ. f. d. reine u. angew. Math. **167** (1932), 312—336.

[19] *H. Rademacher*, Über eine Reziprozitätsformel aus der Theorie der Modulfunktionen (ungarisch mit deutschem Auszug). Matematikai és Fizikai Lapok, **40** (1933), 24—34.

[20] *H. Rademacher*, Bestimmung einer gewissen Einheitswurzel in der Theorie der Modulfunktionen. Journ. London Math. Soc., **7** (1932), 14—19.

[21] *H. Rademacher—A. Whiteman*, Theorems on Dedekind sums. American Journ. of Math. **63** (1941), 377—407.

[22] *L. Rédei*, Bemerkung zur vorstehenden Arbeit des Herrn Rademacher (ungarisch mit deutschem Auszug). Matematikai és Fizikai Lapok, **40** (1933), 35—39.

[23] *M. Stern*, Über einige Eigenschaften der Funktion *Ex*. Journ. f. d. reine u. angew. Math. **59** (1861), 146—162.

[24] *J. Tannery—J. Molk*, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. II, Paris (1896).

[25] *E. Zolotareff*, Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité de Legendre. Nouv. Ann. de Math. (2) **11** (1872), 355—362.

Eingegangen 8. August 1956.

Über die zweidimensionale Verteilung der Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Restklassen*).

Von *Richard Schulz-Arenstorff* in Mainz.

Einleitung.

Die Verteilung der rationalen Primzahlen in einer arithmetischen Progression läßt der Primzahlsatz von Page-Siegel-Walfisz[1]) übersehen:

Es seien a und r natürliche Zahlen mit $(a, r) = 1$, und es bezeichne $\pi(x; a, r)$ die Anzahl der Primzahlen p mit $p \equiv r \bmod a$ und $p \leqq x$. Dann gilt für $x \geqq 3$ gleichmäßig in a

$$\pi(x; a, r) = \frac{1}{\varphi(a)} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}),$$

falls $a \leqq \log^l x$ ist bei beliebigem, aber festem $l \geqq 1$ (c sowie die O-Konstante hängen nur von l ab).

In der nachfolgenden Arbeit werden wir nun einen entsprechenden Verteilungssatz in reell-quadratischen Zahlkörpern beweisen. Es sei hinzugefügt, daß eine Verallgemeinerung des Ergebnisses auf beliebige total-reelle algebraische Zahlkörper endlichen Grades danach keine wesentlichen Schwierigkeiten bereiten würde.

Betrachten wir also einen reell-quadratischen Zahlkörper K (Klassenzahl h, Grundeinheit ε_0). Unter einer Primzahl ω von K verstehen wir eine Körperzahl, die als Hauptideal ein Primideal in K erzeugt. Als Analogon in K zu dem oben genannten Primzahlsatz behaupten wir dann den folgenden Satz:

Es seien $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal und ϱ eine ganze Zahl aus K mit $(\varrho, \mathfrak{a}) = 1$, und es bezeichne $\pi(x, x'; \mathfrak{a}, \varrho)$ die Anzahl der total-positiven Primzahlen ω von K mit $\omega \equiv \varrho \bmod \mathfrak{a}$, $\omega < x$ und $\omega' < x'$ (wobei ω' die Konjugierte zu ω ist). Dann gilt für $x > 0$, $x' > 0$ und $xx' \geqq 3$ gleichmäßig in $\mathfrak{a}$

$$(\pi.) \qquad \pi(x, x'; \mathfrak{a}, \varrho) = \frac{\log xx'}{2h\varphi(\mathfrak{a}) \log \varepsilon_0} \int_2^{xx'} \frac{du}{\log^2 u} + O(xx' e^{-c\sqrt{\log xx'}}),$$

falls $N\mathfrak{a} \leqq \log^l xx'$ ist bei beliebigem, aber festem $l \geqq 1$ (c sowie die O-Konstante hängen nur von l und vom Körper K ab).

Die Formel (π.) wurde für beliebige Moduln $\mathfrak{a}$ von Rademacher bewiesen[2])[3]). Es wurde aber dabei offengelassen, ob und wie die O-Konstante von ϱ und insbesondere von $\mathfrak{a}$

*) Dissertation bei der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Mainz (D 77); Referent: Prof. Dr. *H. Rohrbach*. Herrn Prof. Dr. *C. L. Siegel* danke ich für seine Anregungen und Ratschläge bei der Abfassung dieser Arbeit.

[1]) *A. Walfisz*, Zur additiven Zahlentheorie. II., Math. Zeitschr. **40** (1936), S. 598.

[2]) *H. Rademacher*, Über die Anzahl der Primzahlen eines reell-quadratischen Zahlkörpers, deren Konjugierte unterhalb gegebener Grenzen liegen. Acta arithmetica **1** (1935), S. 67—77.

[3]) *H. Rademacher*, On Prime Numbers of Real-Quadratic Fields in Rectangles. Transactions of the Amer. Math. Soc. **39** (1936), S. 380—398.

abhängt. Die Frage nach einer gleichmäßig in $\mathfrak{a}$ gültigen Fehlergliedabschätzung wird nämlich bei Rademacher — anders als bei uns — noch nicht gestellt. Schon vorher ist von Landau eine (π.) entsprechende Formel über die eindimensionale, nur nach der Norm der Primzahlen angeordnete Verteilung bewiesen worden[4]). Diese Verteilung kommt jedoch in unseren Betrachtungen nicht vor. Wir erwähnen aber, daß sich mit unseren Mitteln auch in diesem Falle beweisen läßt, daß die Fehlergliedabschätzung gleichmäßig in $\mathfrak{a}$ gültig ist, falls die gleiche Einschränkung über die Kongruenzmoduln wie oben gemacht wird.

Zum Beweise unseres Satzes werden wir zuerst neue Ergebnisse über die Lage der Nullstellen der Heckeschen Zetafunktionen des Körpers K herleiten (Sätze 1 und 2) und sodann gewisse Summen und Integrale in geeigneter Weise auswerten, so daß sich alle Abschätzungen mit der erforderlichen Genauigkeit durchführen lassen.

Im einzelnen gliedert sich die Arbeit wie folgt:

In Teil 1 führen wir einige grundlegende Tatsachen über Idealgruppen in K auf, ferner bereits bekannte, für spätere Anwendungen benötigte Ergebnisse in Form von Hilfssätzen, die hier nur für reell-quadratische Zahlkörper formuliert werden.

In Teil 2 bestimmen wir die benötigten nullstellenfreien Bereiche der Heckeschen Zetafunktionen. Dabei haben wir zu unterscheiden zwischen Zetafunktionen mit reellen und mit komplexen Größencharakteren. Im schwierigeren ersten Falle kommen wir zum Ziel (Satz 1) hauptsächlich unter Zuhilfenahme eines neueren Resultates von R. Brauer (Hilfssatz 1) und von Sätzen der Klassenkörpertheorie. Im zweiten Falle, den wir anschließend behandeln, kommen wir zum Ergebnis (Satz 2) mit Hilfe eines passend modifizierten Verfahrens von Landau.

Im Teil 3 wenden wir die gewonnenen Ergebnisse (Satz 3) an, um eine gewisse Summenfunktion (vgl. (6) und (7)) auszuwerten und die dabei auftretenden Integrale geeignet abzuschätzen.

Im Teil 4 leisten wir schließlich den Übergang von der Summenfunktion zur Anzahlfunktion und vollenden den Beweis unseres Satzes.

Weiterhin bezeichne K stets den reell-quadratischen Zahlkörper mit der Diskriminante d, der Klassenzahl h und der Grundeinheit ε_0. Mit ω, $\hat{\omega}$, $\mathfrak{p}$ werden durchweg Primzahlen, ideale Primzahlen, Primideale von K bezeichnet; mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ganze Ideale. α' bedeutet die Konjugierte zu der Zahl α in K, $\varphi(\mathfrak{a})$ den Wert der Eulerschen Funktion und $N\mathfrak{a}$ die Norm des Ideals $\mathfrak{a}$ sowie $N\alpha = \alpha\alpha'$ die Norm von α. Stets ist $0 <\cdot\, \omega <\cdot\, x$ eine Abkürzung für die beiden Ungleichungen $0 < \omega < x$, $0 < \omega' < x'$ mit positiven x, x'. Ebenso steht $\varrho \cdot\!> 0$ für $\varrho > 0$ und $\varrho' > 0$. Die Größe ε bezeichnet nur im ersten Teil Einheiten von K, später dagegen eine kleine positive Zahl. Alle in den Abschätzungen auftretenden Konstanten sind positive Zahlen, die auch bei gleicher Bezeichnung verschieden sein dürfen. Eine Abhängigkeit von beliebig, aber fest eingeführten Größen (z. B. l, ε, $\varepsilon_0, \ldots$) wird nicht in die Bezeichnung aufgenommen. Die Konstanten dürfen von solchen Größen abhängen — nicht dagegen von $\mathfrak{a}$ und ϱ.

1. Idealgruppen und Charaktere. Hilfssätze.

Wir führen nach Hecke[5]) zum Körper K einen Bereich H idealer Zahlen $\hat{\mu}$ ein und betrachten nach dem ganzen Modul $(\hat{\alpha}) = \mathfrak{a}$ die Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{a}$. Diese ist die

---

[4]) *E. Landau*, Über Ideale und Primideale in Idealklassen. Math. Zeitschr. **2** (1918), S. 52—154, Satz LXXXIII.

[5]) *E. Hecke*, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. Math. Zeitschr. **6** (1920), S. 11—51.

Faktorgruppe $H^{\mathfrak{a}}/H_0^{\mathfrak{a}}$ der Gruppe $H^{\mathfrak{a}}$ aller zu $\mathfrak{a}$ primen Zahlen von H nach der Untergruppe $H_0^{\mathfrak{a}}$ der Zahlen μ aus K mit $\mu \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$ und $\mu \gg 0$. Ihre Ordnung ist $4h\varphi(\mathfrak{a})$.

Ist χ einer der Charaktere der Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{a}$ und $\hat{\mu}$ prim zu $\mathfrak{a}$, so sei unter $\chi(\hat{\mu})$ der Wert von χ für diejenige Klasse nach $H_0^{\mathfrak{a}}$ verstanden, der $\hat{\mu}$ angehört.

Sei $\eta_{\mathfrak{a}}$ die total-positive Grundeinheit mod $\mathfrak{a}$ von K; d. h. $\eta_{\mathfrak{a}} = \varepsilon_0^{q_{\mathfrak{a}}}$ und $q_{\mathfrak{a}}$ als natürliche Zahl kleinstmöglich so bestimmt, daß $\eta'_{\mathfrak{a}} > 0$ und $\eta_{\mathfrak{a}} \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$ gilt, so ist durch

$$(1) \qquad \lambda(\hat{\mu}) = \left|\frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}'}\right|^{\frac{\pi i}{\log \eta_{\mathfrak{a}}}}$$

ein Größencharakter mod $\mathfrak{a}$ für den Bereich H erklärt[6]).

Zwei Zahlen $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ aus H heißen mod $\mathfrak{a}$ assoziiert, wenn ihr Quotient eine Potenz von $\eta_{\mathfrak{a}}$ ist, d. h. wenn $\hat{\alpha} = \hat{\beta} \cdot \eta_{\mathfrak{a}}^n$, n ganz, gilt.

Die Einheiten ε von K zerfallen in $2q_{\mathfrak{a}}$ Klassen mod $\mathfrak{a}$ assoziierter Einheiten. Diese Klassen bilden eine Gruppe, und es ist $\chi(\varepsilon) \cdot \lambda^m(\varepsilon)$ ein Charakter dieser Gruppe für jedes ganze m[7]). Ist nun $\chi(\varepsilon) \cdot \lambda^m(\varepsilon) = 1$ bei festem m für alle Einheiten ε von K, so schreiben wir statt $\chi(\hat{\mu}) \cdot \lambda^m(\hat{\mu})$ kürzer $\chi_m(\hat{\mu})$, und auch nur dann. Dies ist der Fall für gewisse Charaktere χ der Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{a}$, nämlich χ mit $\chi(\varepsilon) = \lambda^{-m}(\varepsilon)$ für alle Einheiten ε aus einem vollen System $(\varepsilon)_{\mathfrak{a}}$ von mod $\mathfrak{a}$ nicht-assoziierten Einheiten. Es gibt genau $4h\varphi(\mathfrak{a})/2q_{\mathfrak{a}}$ solche Charaktere χ. Wir haben für jedes m[7]):

$$(2) \qquad \sum_{(\varepsilon)_{\mathfrak{a}}} \chi(\varepsilon)\, \lambda^m(\varepsilon) = \begin{cases} 2q_{\mathfrak{a}}, & \text{falls } \chi(\hat{\mu})\, \lambda^m(\hat{\mu}) = \chi_m(\hat{\mu}) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\chi_m(\varepsilon) = 1$ ist für jede Einheit ε von K, hat $\chi_m(\hat{\mu})$ denselben Wert für assoziierte $\hat{\mu}$. Der Hauptcharakter unter den Größencharakteren χ_m für Ideale wird für $m = 0$ mit dem Hauptcharakter der Gruppe der Klassencharaktere gebildet[7]); er werde mit 1 bezeichnet, während die $4h\varphi(\mathfrak{a})$ Klassencharaktere mod $\mathfrak{a}$ mit χ mod $\mathfrak{a}$ bezeichnet werden, unter denen die oben erklärten $4h\varphi(\mathfrak{a})/2q_{\mathfrak{a}}$ Charaktere χ_0 (Fall $m = 0$) einschließlich des Hauptcharakters 1 vorkommen.

Wir betrachten jetzt die Anzahl der Primzahlen $\omega \equiv \varrho \bmod \mathfrak{a}$ im Rechteck $0 \ll \omega \ll x$ und bilden die Anzahlfunktion

$$(3) \qquad \pi(x; \mathfrak{a}, \varrho) = \sum_{\substack{0 \ll \omega \ll x \\ \omega \equiv \varrho \bmod \mathfrak{a}}} 1, \quad (\varrho, \mathfrak{a}) = 1, \ \varrho \gg 0$$

als Funktion von $x = (x, x')$, wobei wir $\varrho \gg 0$ voraussetzen dürfen, da es in jeder Restklasse total-positive Zahlen gibt. Mit

$$(4) \qquad f(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu \equiv \varrho \bmod \mathfrak{a},\ \mu \gg 0 \text{ und } (\mu) \text{ Primideal} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

haben wir $f(\mu) = O(N\mu^c)$ für $c \geqq 0$ und $f(\mu\eta_{\mathfrak{a}}) = f(\mu)$ für jedes ganze μ aus K. Wir erhalten daher aus einer Formel von Siegel, indem wir

$$(5) \qquad \pi(x; \mathfrak{a}, \varrho) = \sum_{0 \ll \mu \ll x} f(\mu) = F(x, x')$$

und

$$(6) \qquad \int_0^{x'}\int_0^{x} F(u, u')\, du\, du' = G(x, x')$$

---

[6]) Vgl. [5]).

[7]) *H. Rademacher*, Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper I. Hamburger Math. Abh. **3** (1924), S. 109—163.

setzen[8]):

$$(7)\qquad G(x, x') = \frac{xx'}{2\pi i \log \eta_{\mathfrak{a}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x'}{x}\right)^{ina} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{(xx')^s Z_n(s)}{(s^2 + a^2 n^2)((s+1)^2 + a^2 n^2)}\, ds$$

mit

$$(8)\qquad Z_n(s) = \sum_{(\mu)_{\mathfrak{a}}} f(\mu)\, |N\mu|^{-s} \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^{ian}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma_0 > 1$$

und der Abkürzung $a = \dfrac{\pi}{\log \eta_{\mathfrak{a}}}$. Wir brauchen an der zitierten Stelle nur ε durch $\eta_{\mathfrak{a}}$, x durch 0 und y durch x zu ersetzen. In (8) ist dann über ein System $(\mu)_{\mathfrak{a}}$ von mod $\mathfrak{a}$ nicht-assoziierten ganzen Zahlen μ aus K zu summieren. Die rechte Seite in (8) soll noch umgeformt werden; dazu definieren wir für ideale Zahlen

$$f^*(\hat{\mu}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4h\varphi(\mathfrak{a})} \displaystyle\sum_{\chi \bmod \mathfrak{a}} \chi^{-1}(\varrho)\, \chi(\hat{\mu}), & \text{falls } (\hat{\mu}) \text{ Primideal} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und erkennen, daß $f^*(\hat{\mu})$ höchstens für Körperzahlen $\hat{\mu} = \mu$ von Null verschieden ist und für diese nach (4) mit $f(\mu)$ übereinstimmt. Wir dürfen in (8) daher f durch f^* ersetzen und über ideale Zahlen summieren, wobei es wegen (4) genügt, sich auf total-positive Zahlen zu beschränken, so daß wir mit (1) erhalten

$$Z_n(s) = \frac{1}{4h\,\varphi(\mathfrak{a})} \sum_{\chi \bmod \mathfrak{a}} \chi^{-1}(\varrho) \sum_{(\hat{\omega})_{\mathfrak{a}}} \frac{\chi(\hat{\omega})\, \lambda^n(\hat{\omega})}{|N\hat{\omega}|^s}, \quad \sigma > 1.$$

Nun können zwei mod $\mathfrak{a}$ nicht-assoziierte Zahlen sehr wohl assoziiert im gewöhnlichen Sinne sein. Daher wird, wenn wir über ein System $(\hat{\omega})$ von im gewöhnlichen Sinne nicht-assoziierten idealen Primzahlen $\hat{\omega}$ summieren

$$\sum_{(\hat{\omega})_{\mathfrak{a}}} \frac{\chi(\hat{\omega})\, \lambda^n(\hat{\omega})}{|N\hat{\omega}|^s} = \sum_{(\hat{\omega})} \frac{\chi(\hat{\omega})\, \lambda^n(\hat{\omega})}{|N\hat{\omega}|^s} \cdot \sum_{(\varepsilon)_{\mathfrak{a}}} \chi(\varepsilon) \cdot \lambda^n(\varepsilon),$$

und mit (2) für $\sigma > 1$

$$(9)\qquad Z_n(s) = \frac{q_{\mathfrak{a}}}{2h\varphi(\mathfrak{a})} \overset{n}{\sum_{\chi \bmod \mathfrak{a}}} \chi^{-1}(\varrho) \sum_{(\hat{\omega})} \chi_n(\hat{\omega})\, |N\hat{\omega}|^{-s},$$

wo das n am ersten Summenzeichen darauf hinweist, daß nur über solche χ mod $\mathfrak{a}$ zu summieren ist, für die $\chi(\varepsilon)\, \lambda^n(\varepsilon) = 1$ ist für alle Einheiten ε von K.

Die Anzahl solcher χ ist $\dfrac{2h\varphi(\mathfrak{a})}{q_{\mathfrak{a}}}$ mit $q_{\mathfrak{a}} = \dfrac{\log \eta_{\mathfrak{a}}}{\log \varepsilon_0}$.

Aus (9) ersieht man, daß die $Z_n(s)$ mit den Logarithmen der Heckeschen Zetafunktionen zusammenhängen. Letztere sind die mit den Größencharakteren χ_n für Ideale gebildeten L-Reihen des Körpers K, definiert durch[9])

$$(10)\qquad L(s, \chi_n) = \sum_{\mathfrak{b}} \chi_n(\mathfrak{b})\, N\mathfrak{b}^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \chi_n(\mathfrak{p})\, N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

für $\sigma > 1$, wobei $\mathfrak{b}$ alle ganzen und $\mathfrak{p}$ alle Primideale von K durchläuft. Die Charakterwerte $\chi_n(\mathfrak{b})$ sind wie üblich definiert durch $\chi_n(\mathfrak{b}) = \chi_n(\hat{\beta})$, wenn $\hat{\beta}$ eine das Ideal $\mathfrak{b}$ repräsentierende ideale Zahl ist.

---

[8]) *C. L. Siegel*, Mittelwerte arithmetischer Funktionen in Zahlkörpern. Transactions of the Amer. Math. Soc. **39** (1936), S. 221, Satz 2.

[9]) Vgl. [5]).

Wir führen jetzt einige später benötigte Hilfssätze auf:

Hilfssatz 1. *Bezeichnet* $r(k) = \lim_{s \to 1} (s-1)\,\zeta_k(s)$ *das Residuum der Dedekindschen Zetafunktion eines Körpers* k, *so gilt*

$$\log r(k) = o(\log |D|), \quad |D| \to \infty$$

für jeden algebraischen Zahlkörper k *mit der Diskriminante* D *von beliebigem, aber festem Absolutgrade* n.

Für den Beweis vgl.[10]).

Hilfssatz 2. *Sei* $\mathfrak{a}$ *ein ganzes Ideal von* K, χ *nicht der Hauptcharakter* mod $\mathfrak{a}$ *und* $L(s, \chi)$ *die nach* (10) *mit dem Klassencharakter* χ *gebildete Heckesche Zetafunktion. Dann gilt*

$$|L(s, \chi)| < \log^2 d\, N\mathfrak{a} \text{ für } 1 - \frac{1}{\log d^2 N\mathfrak{a}} \leqq \sigma \leqq 3, \quad |t| \leqq 1.$$

Dies folgt unmittelbar aus einem Satz von Landau[11]).

Hilfssatz 3. *Für die mit dem Größencharakter* χ_m mod $\mathfrak{a}$ *für Ideale nach* (10) *gebildete Heckesche Zetafunktion gilt*

$$|(s-1)^{e(\chi_m)} \cdot L(s, \chi_m)| < CN\mathfrak{a}^2 \cdot (1 + |m|)^4 (1 + |t|)^4$$

für $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 4$ *mit* $e(\chi_m) = 1$ *für den Hauptcharakter und* $e(\chi_m) = 0$ *sonst.*

Aus einem Satz von Rademacher[12]) folgt nämlich wegen $\eta_{\mathfrak{a}} \geqq \varepsilon_0$ und

$$\left(1 + \left|t + \frac{\pi m}{\log \eta_{\mathfrak{a}}}\right|\right)\left(1 + \left|t - \frac{\pi m}{\log \eta_{\mathfrak{a}}}\right|\right) \leqq \left(1 + |t| + |m| \frac{\pi}{\log \varepsilon_0}\right)^2$$
$$\leqq C\,(1 + |m|)^2 (1 + |t|)^2$$

die behauptete gleichmäßige Abschätzung.

2. Nullstellenfreie Bereiche für die Heckeschen Zetafunktionen.

Durch Hecke ist bekannt, daß die in (10) definierten $L(s, \chi_n)$ für $\chi_n \neq 1$ ganze Funktionen sind und daß auch $L(s, 1)$ mit Ausnahme des Poles erster Ordnung bei $s = 1$ in der ganzen s-Ebene regulär ist. Es ist ferner $L(s, \chi_n) \neq 0$ für $\sigma > 1$.

Wir wählen ein positives ε und ein hinreichend großes ξ. Da $L(s, 1)$ bei $s = 1$ einen Pol hat, ist zunächst

$$L(s, 1) \neq 0 \text{ für } \sigma > 1 - \xi^{-\varepsilon}, \quad |t| < \xi^{-\varepsilon}. \tag{11}$$

Sei im folgenden χ_n reell und nicht der Hauptcharakter, also $\chi_n^2 = 1$, $\chi_n \neq 1$. Dann ist $\chi_n = \chi$ ein quadratischer Klassencharakter mod $\mathfrak{a}$.

Wir setzen zuerst χ als eigentlich voraus. Der durch χ erzeugten Untergruppe von der Ordnung 2 in der Charaktergruppe mod $\mathfrak{a}$ ist dann die Untergruppe $H_\chi^{\mathfrak{a}}$ vom Index 2 in der Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{a}$ zugeordnet, die aus allen zu $\mathfrak{a}$ primen $\hat{\mu}$ mit $\chi(\hat{\mu}) = 1$ besteht. Es ist χ auch Charakter der Gruppe $H^1/H_\chi^{\mathfrak{a}}$ von der Ordnung 2. Der Führer von H_χ^1 ist $\mathfrak{a}$ selbst.

Die Idealgruppe H_χ^1 definiert nun eindeutig einen algebraischen Zahlkörper K_2 vom Relativgrad 2 über K, nämlich den Klassenkörper zur Idealgruppe $H_\chi^{\mathfrak{a}}$ von K.

---

[10]) *R. Brauer*, The ζ-Functions of Algebraic Number Fields. Amer. Journ. of Math. **69** (1947), S. 248, (16).

[11]) *E. Landau*, Zur Theorie der Heckeschen Zetafunktionen, welche komplexen Charakteren entsprechen. Math. Zeitschr. **4** (1919), S. 158, Satz 5.

[12]) *H. Rademacher*, Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper III. Math. Zeitschr. **27** (1927), Hilfssatz 15, S. 362–365.

Sei wieder $\zeta_k(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers k, so ist auf Grund bekannter Sätze der Klassenkörpertheorie[13])

$$\zeta_{K_2}(s) = \zeta_K(s) \cdot L(s, \chi), \tag{12}$$

da $L(s, 1) = \zeta_K(s)$ ist für den eigentlichen Charakter $\chi^2 = 1$.

Sei ferner D die Diskriminante von K_2, so ist auch

$$|D| = d^2 N\mathfrak{a} \tag{13}$$

bekannt[13]). Wir wenden Hilfssatz 1 auf den Klassenkörper K_2 an, beachten (12) und (13) und erhalten, da $\chi \neq 1$ ist,

$$|\log r(K_2)| = |\log \{r(K) L(1, \chi)\}| < \varepsilon \log |D|$$

für $|D| > D_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, oder

$$\log \{r(K) L(1, \chi)\} > \log |D|^{-\varepsilon}, \; L(1, \chi) > \frac{(d^2 N\mathfrak{a})^{-\varepsilon}}{r(K)},$$

also

$$L(1, \chi) > c_\varepsilon N\mathfrak{a}^{-\varepsilon} \text{ für } \varepsilon > 0. \tag{14}$$

Für $|D| = d^2 N\mathfrak{a} \leqq D_\varepsilon$ erhalten wir $L(1, \chi) > c'_\varepsilon \geqq c'_\varepsilon N\mathfrak{a}^{-\varepsilon}$, daher gilt (14) für alle $\mathfrak{a}$ und alle eigentlichen $\chi \bmod \mathfrak{a}$ mit $\chi^2 = 1$, $\chi \neq 1$.

Ist jedoch χ uneigentlich, so sei χ^* der durch χ bestimmte eigentliche Charakter vom Führer $\mathfrak{f}$. Es ist $\mathfrak{f} \mid \mathfrak{a}$ und

$$L(1, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}} (1 - \chi^*(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-1}) L(1, \chi^*).$$

Mit χ ist auch χ^* reell, also

$$\prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}} (1 - \chi^*(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-1}) \geqq \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}} (1 - N\mathfrak{p}^{-1}) = \frac{\varphi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}.$$

Für $0 < x < 1$ ist nun

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \leqq x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

und mit $x = N\mathfrak{p}^{-1}$:

$$\log N\mathfrak{a} - \log \varphi(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}} \log \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{-1}} \leqq \sum_{N\mathfrak{p} \leqq N\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{p} - 1} \leqq \log \log N\mathfrak{a} + c + o(1),$$

letzteres ist wohlbekannt. Hiernach gilt $\dfrac{N\mathfrak{a}}{\varphi(\mathfrak{a})} \leqq c_1 \cdot \log N\mathfrak{a}$ und folglich wegen $N\mathfrak{f} \leqq N\mathfrak{a}$ und (14)

$$L(1, \chi) \geqq \frac{\varphi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} L(1, \chi^*) > \frac{c_\varepsilon N\mathfrak{f}^{-\varepsilon}}{c_1 \log N\mathfrak{a}} \geqq c'_\varepsilon N\mathfrak{a}^{-2\varepsilon}; \tag{15}$$

denn für $L(1, \chi^*)$ gilt (14) mit $\mathfrak{f}$ statt $\mathfrak{a}$.

Wir setzen weiterhin für positives ξ

$$N\mathfrak{a} \leqq \xi \tag{16}$$

voraus und fassen (14) und (15) unter der Bedingung (16) zusammen:

$$L(1, \chi_n) > c_\varepsilon \xi^{-\varepsilon} \text{ für } \varepsilon > 0, \; \chi_n^2 = 1, \; \chi_n \neq 1. \tag{17}$$

[13]) *H. Hasse*, Bericht über Klassenkörpertheorie. Jahresbericht d. Deutschen Math. Vereinigung **35** (1926), S. 33 bzw. 38.

Aus Hilfssatz 2 folgt für $\chi_n^2 = 1$, $\chi_n \neq 1$, da dann χ_n ein Klassencharakter χ mod $\mathfrak{a}$ ist, und wegen (16)

$$(18) \qquad |L(s, \chi_n)| < C \log^2 \xi \text{ für } 1 - \frac{1}{c \log \xi} \leqq \sigma \leqq 3, \ |t| \leqq 1.$$

Sei $r = \dfrac{1}{2c \log \xi}$, $1 - r \leqq \sigma_0 \leqq 2$, $|t_0| \leqq \dfrac{1}{2}$, dann gilt (18) im Kreise $|s - s_0| \leqq r$; folglich ist $|L'(s_0, \chi_n)| < 2cC \log^3 \xi$ oder

$$(19) \qquad |L'(s, \chi_n)| < C' \log^3 \xi \text{ für } 1 - \frac{1}{c' \log \xi} \leqq \sigma \leqq 2, \ |t| \leqq \frac{1}{2}.$$

Für ein $s_1 = \sigma_1 + it_1$ mit $1 \geqq \sigma_1 \geqq 1 - \xi^{-\varepsilon} \geqq 1 - \dfrac{1}{c' \log \xi}$, $\xi > M_\varepsilon$ und $|t_1| \leqq \xi^{-\varepsilon}$, $(\varepsilon > 0)$ gilt dann wegen (17) und (19):

$$|L(s_1, \chi_n)| \geqq L(1, \chi_n) - \left| \int_{s_1}^{1} L'(s, \chi_n)\, ds \right| \geqq c_{\frac{\varepsilon}{2}} \xi^{-\frac{\varepsilon}{2}} - C' \log^3 \xi \cdot \sqrt{2}\, \xi^{-\varepsilon}$$

$$\geqq c_{\frac{\varepsilon}{2}} \xi^{-\varepsilon} \left(\xi^{\frac{\varepsilon}{2}} - C'_\varepsilon \log^3 \xi\right) > 0,$$

also ist $L(s, \chi_n) \neq 0$ für $\sigma > 1 - \xi^{-\varepsilon}$, $|t| < \xi^{-\varepsilon}$, $\xi > M_\varepsilon$. Mit (11) erhalten wir

Satz 1. *Unter der Bedingung* (16) *und falls* $\chi_n^2 = 1$ *ist, gilt* $L(s, \chi_n) \neq 0$ *für* $\sigma > 1 - \xi^{-\varepsilon}$ $|t| < \xi^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ *und* $\xi > M_\varepsilon$.

Wir wählen jetzt ein festes $\varepsilon > 0$ und zu $\xi > M_\varepsilon$ ein T mit

$$(20) \qquad \log T > \xi^\varepsilon \qquad (\xi > M_\varepsilon),$$

setzen die Gültigkeit von (16) voraus und nehmen an, daß

$$(21) \qquad L(s_0, \chi_n) = 0$$

ist für ein $s_0 = \sigma_0 + it_0$ und n mit

$$(22) \qquad 1 - \frac{1}{\log T} \leqq \sigma_0 \leqq 1, \ |t_0| \leqq T, \ |n| \leqq T$$

und, falls $\chi_n^2 = 1$, außerdem $|t_0| \geqq \xi^{-\varepsilon}$ zutrifft. Es sei

$$(23) \qquad u = 1 + \frac{1}{c_0 \log T}, \ c_0 > 3,$$

$$(24) \qquad g(s) = L^3(u + s, 1) \cdot L^4(u + it_0 + s, \chi_n) \cdot L(u + 2it_0 + s, \chi_n^2),$$

$$(25) \qquad L^*(s, \chi_n) = (s - 1)^{e(\chi_n)} \cdot L(s, \chi_n), \ e(\chi_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \chi_n = 1 \\ 0, & \text{falls } \chi_n \neq 1 \end{cases}$$

$$(26) \qquad f(s) = L^{*3}(u + s, 1) \cdot L^{*4}(u + it_0 + s, \chi_n) \cdot L^*(u + 2it_0 + s, \chi_n^2).$$

$f(s)$ ist eine ganze Funktion, für die im Kreise $|s| \leqq 1$ (dort ist $0 < u + \sigma < 3$ nach (23)) der Hilfssatz 3 gilt, danach ist mit (16), (20) und (22)

$$(27) \qquad |f(s)| < T^{m_0} \text{ für } |s| \leqq 1$$

und ein geeignetes m_0, wobei m_0 nicht von c_0 abhängt. Es gilt ferner

$$f(s) = (u - 1 + s)^3 (u - 1 + it_0 + s)^{4e(\chi_n)} (u - 1 + 2it_0 + s)^{e(\chi_n^2)} g(s),$$

also

$$(28)\qquad f(0) = (u-1)^3\,(u-1+it_0)^{4e(\chi_n)}\,(u-1+2it_0)^{e(\chi_n^2)}\,g(0),$$

$$(29)\qquad \frac{f'}{f}(0) = \frac{3}{u-1} + \frac{4e(\chi_n)}{u-1+it_0} + \frac{e(\chi_n^2)}{u-1+2it_0} + \frac{g'}{g}(0).$$

Nun ist für $\sigma > 1$ und alle t

$$(30)\qquad \mathfrak{Re}\left\{3\frac{L'}{L}(\sigma,1) + 4\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi_n) + \frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi_n^2)\right\} \leqq 0$$

und

$$(31)\qquad |\,L^3(\sigma,1)\,L^4(\sigma+it,\chi_n)\,L(\sigma+2it,\chi_n^2)\,| \geqq 1,$$

was leicht aus $L(s,\chi_n) = \exp\left\{\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{\chi_n(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^l\right\}$ und der bekannten Cosinus-Ungleichung folgt. Daher ist nach (24) wegen $u > 1$

$$|\,g(0)\,| \geqq 1 \text{ und } \mathfrak{Re}\left\{\frac{g'}{g}(0)\right\} \leqq 0$$

und nach (28) und (23)

$$(32)\qquad |\,f(0)\,| > (u-1)^8 = (c_0 \log T)^{-8} > (c_0\,T)^{-8};$$

ferner wird im Falle $e(\chi_n) = 1$ bzw. $e(\chi_n^2) = 1$ nach (22) und (20)

$$|\,t_0\,| \geqq \xi^{-\varepsilon} > \frac{1}{\log T} > \frac{3}{c_0 \log T},$$

und nach (29) somit

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\left\{\frac{f'}{f}(0)\right\} &\leqq 3c_0 \log T + \frac{4(u-1)}{(u-1)^2+t_0^2} + \frac{u-1}{(u-1)^2+4t_0^2}\\ (33)\qquad &\leqq 3c_0 \log T + c_0 \log T\left(\frac{4}{1+t_0^2c_0^2\log^2 T} + \frac{1}{1+4t_0^2c_0^2\log^2 T}\right)\\ &\leqq c_0 \log T\left(3 + \frac{4}{10} + \frac{1}{37}\right) < \frac{7}{2}c_0 \log T.\end{aligned}$$

Aus (27) und (32) folgt für $|\,s\,| \leqq 1$

$$(34)\qquad \left|\frac{f(s)}{f(0)}\right| < c_0^8\,T^{m_0+8} = e^M \text{ mit } M = 8\log c_0 + (m_0+8)\log T.$$

Damit sind alle Voraussetzungen eines Satzes von Landau[14]) erfüllt: $f(s)$ ist regulär nach (26) und erfüllt (34) in $|\,s\,| \leqq r = 1$; $f(s) \neq 0$ für $\sigma \geqq 0$ wegen $u > 1$ und (26); für $\varrho = \sigma_0 - u$ ist $f(\varrho) = 0$ nach (21), (25) und (26) von mindestens vierter Ordnung, also $h_0 \geqq 4$. Dabei ist $-\frac{r}{2} \leqq \varrho < 0$; denn es ist $r = 1$,

$$u - \frac{r}{2} = 1 + \frac{1}{c_0 \log T} - \frac{1}{2} \leqq \frac{3}{4} \leqq \sigma_0$$

wegen

$$1 - \frac{1}{\log T} \leqq \sigma_0 \leqq 1$$

nach (22) für hinreichend großes T, und $\sigma_0 - u < 0$ wegen $u > 1$.

[14]) *E. Landau*, Über die Wurzeln der Zetafunktionen. Math. Zeitschr. **20** (1924), S. 99—100, § 1.

Nach Landau[14]) folgt für $M = 8 \log c_0 + (m_0 + 8) \log T$, $\varrho = \sigma_0 - u$, $r = 1$, $h_0 \geqq 4$:

$$0 \leqq 4M + \frac{h_0}{\sigma_0 - u} + \Re\mathfrak{e}\left\{\frac{f'}{f}(0)\right\} < 32 \log c_0 + 4(m_0 + 8) \log T + \frac{7}{2} c_0 \log T - \frac{4}{u - \sigma_0},$$

wobei wir (33) benutzt haben, oder

$$u - \sigma_0 > \frac{4}{32 \log c_0 + (4(m_0 + 8) + 3{,}5 c_0) \log T},$$

$$\sigma_0 < 1 + \frac{1}{c_0 \log T} - \frac{1}{8 \log c_0 + \left(m_0 + 8 + \frac{7}{8} c_0\right) \log T}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{\frac{8}{\log T} \frac{\log c_0}{c_0} + \frac{m_0}{c_0} + \frac{8}{c_0} + \frac{7}{8}} - 1\right) \frac{1}{c_0 \log T},$$

also

$$\sigma_0 < 1 - \frac{1}{c_1 \log T}, \quad c_1 > 3, \tag{35}$$

da m_0 nicht von c_0 abhängt, und somit sicher

$$\frac{8}{\log T} \frac{\log c_0}{c_0} + \frac{m_0}{c_0} + \frac{8}{c_0} + \frac{7}{8} < \frac{15}{16}$$

für hinreichend großes c_0 zutrifft.

Es ist $1 - \frac{1}{c_1 \log T} > 1 - \frac{1}{\log T} > 1 - \xi^{-\varepsilon}$ nach (20), und da für jede Nullstelle s_0 von $L(s, \chi_n)$ mit der Eigenschaft (22) wie eben gezeigt (35) gilt, bekommen wir zusammen mit Satz 1, (22) und (25):

Satz 2. *Es ist* $L^*(s, \chi_n) \neq 0$ *für* $|n| \leqq T$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{c_1 \log T}$ *und* $|t| \leqq T$, *falls* (16) *und* (20) *erfüllt sind.*

Sei $s_1 = 2 + it_1$, $|t_1| \leqq \sqrt{T} < T - 2$ und $R = 1 + \frac{1}{2 c_1 \log T}$, dann ist für $|n| \leqq \sqrt{T}$ auf Grund von Satz 2 und (25) die mit dem Hauptwert des Logarithmus gebildete Funktion $\operatorname{Log} L^*(s, \chi_n)$ im Kreise $|s - s_1| \leqq R$ regulär. Dort gilt ferner

$$\Re\mathfrak{e}\,\{\operatorname{Log} L^*(s, \chi_n)\} = \log |L^*(s, \chi_n)| < m_1 \log T = M \tag{36}$$

nach Hilfssatz 3, (16) und (20) für ein geeignetes m_1. Wegen

$$\begin{aligned} |\operatorname{Log} L^*(s_1, \chi_n)| &\leqq |\operatorname{Log}(1 + it_1)| + \left|\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{\chi_n(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{s_1}}\right)^l\right| + C \\ &\leqq C_1 + \log(1 + |t_1|) + \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} N\mathfrak{p}^{-2l} \\ &\leqq C_2 + \log T \end{aligned}$$

folgt für $r = 1 + \frac{1}{3 c_1 \log T} < R$ nach einem Satz von Landau[15]) mittels (36):

$$\begin{aligned} |\operatorname{Log} L^*(s, \chi_n)| &\leqq C_2 + \log T + \frac{2\left(1 + \frac{1}{3 c_1 \log T}\right)}{\frac{1}{6 c_1 \log T}} (m_1 \log T + C_2 + \log T) \\ &\leqq 12 c_1 (m_1 + 1) \log^2 T + (12 c_1 C_2 + 4 m_1 + 5) \log T + 5 C_2 \\ &\leqq C \log^2 T \quad \text{für} \quad |s - s_1| \leqq r. \end{aligned} \tag{37}$$

[15]) *E. Landau*, Vorlesungen über Zahlentheorie 1 (1927), Satz 225, S. 192.

Damit ist gezeigt, indem $3c_1 = c$ gesetzt wird:

Satz 3. *Die mit dem Hauptwert des Logarithmus gebildete, durch* (10) *und* (25) *erklärte Funktion* $\operatorname{Log} L^*(s, \chi_n)$ *ist regulär für* $\sigma > 1$ *und, falls* $|n| \leqq \sqrt{T}$, (16) *und* (20) *erfüllt sind, sogar auch im Bereich*

$$1 - \frac{1}{c \log T} \leqq \sigma \leqq 2, \quad |t| \leqq \sqrt{T}, \tag{38}$$

wo dann die Abschätzung

$$|\operatorname{Log} L^*(s, \chi_n)| \leqq C \cdot \log^2 T \tag{39}$$

gilt.

3. Integralabschätzungen.

Aus (10) folgt für $\sigma > 1$

$$\operatorname{Log} L(s, \chi_n) = \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{\chi_n(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^l = \sum_{\mathfrak{p}} \chi_n(\mathfrak{p})\, N\mathfrak{p}^{-s} + R(s, \chi_n). \tag{40}$$

Wegen

$$\left|\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{\chi_n(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^l\right| \leqq \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2\sigma}} \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{-\sigma}} < \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{N\mathfrak{p}^{-2\sigma_0}}{1 - 2^{-\sigma_0}}$$
$$< \frac{1}{2 - 2^{1-\sigma_0}} \sum_{\mathfrak{b}} N\mathfrak{b}^{-2\sigma_0} < \frac{\zeta_K(2\sigma_0)}{2 - \sqrt{2}}$$

für $\sigma \geqq \sigma_0 > \frac{1}{2}$ ist für alle n

$$|R(s, \chi_n)| < C \text{ und } R(s, \chi_n) \text{ regulär für } \sigma \geqq \frac{3}{4}. \tag{41}$$

Wir erhalten aus (40) durch Einsetzen in (9)

$$Z_n(s) = \frac{q_a}{2h\varphi(\mathfrak{a})} \sum_{\chi \bmod \mathfrak{a}}^{n} \chi^{-1}(\varrho) \{\operatorname{Log} L(s, \chi_n) - R(s, \chi_n)\}$$

und, da $q_a = \dfrac{\log \eta_a}{\log \varepsilon_0}$, $\displaystyle\sum_{\chi \bmod \mathfrak{a}}^{n} 1 = \frac{2h \cdot \varphi(\mathfrak{a})}{q_a}$, durch Einsetzen in (7) mittels (25)

$$G(x, x') = \frac{-X}{2h\varphi(\mathfrak{a}) \log \varepsilon_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{X^s \operatorname{Log}(s-1)}{s^2 (s+1)^2}\, ds + Q(X) \tag{42}$$

mit $\sigma_0 > 1$ und

$$|Q(X)| \leqq \frac{X}{2\pi \log \eta_a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{X^s \{\operatorname{Log} L^*(s, \chi_n) - R(s, \chi_n)\}}{(s^2 + a^2 n^2)((s+1)^2 + a^2 n^2)}\, ds \right|, \tag{43}$$

wobei wir die Abkürzungen

$$X = xx', \quad a = \frac{\pi}{\log \eta_a} \tag{44}$$

benutzt haben. Setzen wir noch

$$\operatorname{Log} L^*(s, \chi_n) - R(s, \chi_n) = H(s, \chi_n), \tag{45}$$

so gilt nach (41) auch für $H(s, \chi_n)$ der Satz 3.

Im folgenden sei stets (16) vorausgesetzt.

Wir verfügen nunmehr über das bei (16) eingeführte ξ sowie über T:

$$\xi = \log^l X, \quad l \geqq 1; \quad T = e^{2\sqrt{\log X}}, \tag{46}$$

und erfüllen hiermit für $\varepsilon = \frac{1}{2l}$ die Bedingung (20), falls $X > X_0(l)$. Indem wir noch

$$\sigma_0 = 1 + \frac{1}{X}, \quad \tau = \sqrt{T} = e^{\sqrt{\log X}}, \tag{47}$$
$$\sigma_1 = 1 - \frac{1}{c \log T} = 1 - \frac{1}{2c\sqrt{\log X}}$$

einführen, erhalten wir für $|n| \leqq \tau$ und $X > X_0$ durch Abänderung des Integrationsweges nach Satz 3 die Abschätzung

$$|I(n)| = \left| \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{X^s H(s, \chi_n)}{(s^2 + a^2 n^2)\left((s+1)^2 + a^2 n^2\right)} ds \right| \tag{48}$$
$$\leqq 2 \left\{ \int_{\sigma_1}^{\sigma_0 + i\tau} |\cdots| + \int_{\sigma_1 + i\tau}^{\sigma_0 + i\tau} |\cdots| + \int_{\sigma_0 + i\tau}^{\sigma_0 + i\infty} |\cdots| \right\} = 2\{I_1 + I_2 + I_3\}$$

in leicht verständlicher Schreibweise. Es wird nach (39), (41), (45)

$$I_1 \leqq C\, X^{\sigma_1} \log^2 T \int_0^{\tau} \frac{dt}{|(\sigma_1 + it)^2 + a^2 n^2| \cdot |(\sigma_1 + 1 + it)^2 + a^2 n^2|}$$
$$\leqq C_1 X^{\sigma_1} \log^2 T \int_0^{\infty} \frac{dt}{(\sigma_1 + |t - an|)^2 \cdot (\sigma_1 + |t + an|)^2} \tag{49}$$
$$\leqq \frac{C_1 X^{\sigma_1} \log^2 T}{(\frac{1}{2} + |an|)^2} \left(\int_0^{|an|} \frac{dt}{(\frac{1}{2} + |an| - t)^2} + \int_{|an|}^{\infty} \frac{dt}{(\frac{1}{2} + t - |an|)^2} \right)$$
$$\leqq \frac{C_2 X^{\sigma_1} \log X}{(\frac{1}{2} + |an|)^2} \cdot 2 \int_0^{\infty} \frac{dt'}{(\frac{1}{2} + t')^2} \leqq C_3 X e^{-\frac{1}{2c}\sqrt{\log X}} \log X \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2} + |an|)^2},$$

und ähnlich (immer für $X > X_0$)

$$I_2 \leqq C\, X^{\sigma_0} \log^2 T \cdot \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{(\sigma_1 + \tau + |an|)^2 \cdot (\sigma_1 + |\tau - |an||)^2} \tag{50}$$
$$\leqq C_1 X\, e^{\frac{1}{X}\log X} \log X \cdot \tau^{-2} \leqq C_1 X \log X \cdot e^{\frac{1}{X}\log X - 2\sqrt{\log X}}.$$

Da ferner nach (47)

$$|\operatorname{Log} L(\sigma_0 + it, \chi_n)| = \left| \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{\chi_n(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{\sigma_0 + it}} \right)^l \right| \tag{51}$$
$$\leqq \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{1}{N\mathfrak{p}^{\sigma_0}} \right)^l = \log \zeta_K(\sigma_0)$$
$$\leqq \log \frac{C}{\sigma_0 - 1} \leqq \log C \cdot X$$

gilt, wird mit $\delta_n = 1$ für $n = 0$ und $\delta_n = 0$ für $n \neq 0$, und (45), (25) und (41)

$$I_3 \leqq C\, X^{\sigma_0} \log X \cdot \int_{\tau}^{\infty} \frac{1 + \delta_n |\log(\sigma_0 - 1 + it)|}{(\sigma_0 + |t - an|)^2 \cdot (\sigma_0 + |t + an|)^2} dt \tag{52}$$
$$\leqq C_1 X^{\sigma_0} \log X \cdot \tau^{-2} \int_3^{\infty} \frac{1 + \delta_n \log 2t}{(1 + |t - |an||)^2} dt$$
$$\leqq C_2 X \log X \cdot e^{\frac{1}{X}\log X - 2\sqrt{\log X}},$$

ähnlich wie bei (49).

Wir fassen (48), (49), (50) und (52) zusammen:

$$(53)\qquad |I(n)| \leqq CX\log X\cdot\left\{\frac{e^{-\frac{1}{2c}\sqrt{\log X}}}{(\frac{1}{2}+|an|)^2}+e^{\frac{1}{X}\log X-2\sqrt{\log X}}\right\}$$

gültig für $|n|\leqq\tau$, $X>X_0$.

Für $|n|>\tau$ erhalten wir mit (45), (25), (41) und (51) ohne Verlegung des Integrationsweges ähnlich wie bei (49):

$$(54)\qquad \begin{aligned}|I(n)| &\leqq C\,X^{\sigma_0}\log X\cdot\int\limits_0^\infty\frac{dt}{|(\sigma_0+it)^2+a^2n^2|\cdot|(\sigma_0+1+it)^2+a^2n^2|}\\ &\leqq C_1X^{\sigma_0}\log X\cdot\frac{1}{(\sigma_0+|an|)^2}\leqq C_2Xe^{\frac{1}{X}\log X}\cdot\log^{2l+1}X\cdot\frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

da aus (44), (16), (46) und der Definition von $\eta_{\mathfrak{a}}$

$$a^{-2}=\frac{1}{\pi^2}\log^2\eta_{\mathfrak{a}}\leqq c_1q_{\mathfrak{a}}^2\log^2\varepsilon_0\leqq c_2\varphi(\mathfrak{a})^2\leqq c_2N\mathfrak{a}^2\leqq c_2\log^{2l}X$$

folgt. Nach (48) und (45) folgt hiermit aus (43), (53) und (54)

$$\begin{aligned}|Q(X)| &\leqq\frac{X}{\pi\log\varepsilon_0}\left\{\sum_{n=0}^{[\tau]}|I(n)|+\sum_{n=[\tau]+1}^{\infty}|I(n)|\right\}\\ &\leqq CX^2\log X\cdot\left\{\log^{2l}X\cdot e^{-\frac{1}{2c}\sqrt{\log X}}+\tau e^{\frac{1}{X}\log X-2\sqrt{\log X}}\right\}\\ &\qquad+CX^2\log^{2l+1}X\cdot e^{\frac{1}{X}\log X}\sum_{n>\tau}\frac{1}{n^2}\\ &\leqq C_1X^2\log^{2l+1}X\cdot\left\{e^{-\frac{1}{2c}\sqrt{\log X}}+e^{-\sqrt{\log X}\left(1-\frac{1}{X}\sqrt{\log X}\right)}\right\}\end{aligned}$$

also

$$(55)\qquad |Q(X)|\leqq C_2X^2e^{-c_1\sqrt{\log X}}$$

für $X>X_0$; während für $2\leqq X\leqq X_0$ direkt aus (43) ähnlich wie bei (52) und (54) wegen (25), (41), (47) und (51) folgt:

$$\begin{aligned}|Q(X)| &\leqq CXX^{\sigma_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^\infty\frac{C_1+\log C_2\cdot X+\delta_n|\log(\sigma_0-1+it)|}{(\sigma_0+|t-an|)^2\cdot(\sigma_0+|t+an|)^2}\,dt\\ &\leqq C_3X^{1+\sigma_0}\log X\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sigma_0+|an|)^2}\cdot\int\limits_0^\infty\frac{1+\delta_n|\log|X^{-1}+it||}{(\sigma_0+|t-|an||)^2}\,dt\\ &\leqq C_4X^{1+\sigma_0}\log X\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+an)^2}\cdot\left\{\int\limits_0^3(1+\delta_n\log X)\,dt+\int\limits_3^\infty\frac{1+\delta_n\log 2t}{(1+|t-|an||)^2}\,dt\right\}\\ &\leqq C_5X^{1+\sigma_0}\log^2X\cdot a^{-2}\\ &\leqq C_6X^2e^{-\sqrt{\log X}\cdot\left(1-\frac{1}{X}\sqrt{\log X}\right)}\cdot e^{\sqrt{\log X_0}}\cdot\log^{2l+2}X_0\\ &\leqq C_7X^2e^{-c_1'\sqrt{\log X}},\end{aligned}$$

so daß (55) für alle $X\geqq 2$ gilt.

Wegen (55) bekommen wir daher aus (42)

$$(56)\quad G(x, x') = \frac{X}{2h\varphi(\mathfrak{a})\log\varepsilon_0}\,\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\frac{X^s\operatorname{Log}(s-1)}{s^2(s+1)^2}\,ds + O(X^2e^{-c\sqrt{\log X}})$$

für alle $X = xx' \geqq 2$ und $\sigma_0 = 1 + \frac{1}{X}$ nach (47).

4. Approximation der Anzahlfunktion.

Für $0 < \delta < x$, $0 < \delta' < x'$ bekommen wir

$$(57)\quad \begin{aligned}\Delta G(x, x') &= G(x+\delta, x'+\delta') - G(x+\delta, x') - G(x, x'+\delta') + G(x, x')\\ &= \int\limits_{x'}^{x'+\delta'}\int\limits_{x}^{x+\delta} F(u, u')\,du\,du'\end{aligned}$$

nach (6). Wir setzen noch

$$(58)\quad \begin{aligned}I(\delta, \delta') &= \frac{1}{\delta\delta'}\int\limits_{x'}^{x'+\delta'}\int\limits_{x}^{x+\delta} F(u, u')\,du\,du' - F(x, x')\\ &= \frac{1}{\delta\delta'}\,\Delta G(x, x') - F(x, x'),\end{aligned}$$

$$(59)\quad D(\delta, \delta') = \frac{1}{\delta\delta'}\,\Delta H(x, x') - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y'}H(y, y')\Big|_{(x, x')},$$

$$(60)\quad \begin{aligned}H(x, x') &= \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{(xx')^{s+1}\operatorname{Log}(s-1)}{s^2(s+1)^2}\,ds\\ &= \frac{-X}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\frac{X^s\operatorname{Log}(s-1)}{s^2(s+1)^2}\,ds,\quad \left(\sigma_0 = 1+\frac{1}{X}\right),\end{aligned}$$

$$(61)\quad \delta = xe^{-\frac{c}{4}\sqrt{\log X}},\quad \delta' = x'e^{-\frac{c}{4}\sqrt{\log X}},\quad \gamma = \frac{1}{2h\varphi(\mathfrak{a})\log\varepsilon_0},$$

und erhalten mit (56) und (57) wegen $X = xx'$ und (60)

$$(62)\quad \begin{aligned}&\left|F(x, x') - \gamma\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y'}H(y, y')\Big|_{(x, x')}\right| = \Big|F(x, x') - \frac{1}{\delta\delta'}\,\Delta G(x, x') + \frac{1}{\delta\delta'}\,\Delta G(x, x')\\ &\quad - \gamma\frac{1}{\delta\delta'}\,\Delta H(x, x') + \gamma\frac{1}{\delta\delta'}\,\Delta H(x, x') - \gamma\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y'}H(y, y')\Big|_{(x, x')}\Big|\\ &= \left|-I(\delta, \delta') + \frac{1}{\delta\delta'}\,\Delta G(x, x') - \gamma\frac{1}{\delta\delta'}\,\Delta H(x, x') + \gamma D(\delta, \delta')\right|\\ &\leqq |I(\delta, \delta')| + \gamma\,|D(\delta, \delta')| + \frac{C}{\delta\delta'}X^2e^{-c\sqrt{\log X}}\\ &\leqq CXe^{-c'\sqrt{\log X}},\end{aligned}$$

falls nur die Abschätzungen zutreffen:

$$(63)\quad |I(\delta, \delta')| \leqq CXe^{-c'\sqrt{\log X}},$$

$$(64)\quad |D(\delta, \delta')| \leqq CXe^{-c'\sqrt{\log X}}.$$

Wir zeigen zuerst die Gültigkeit von (63):

Nach (3), (4) und (5) ist $F(x, x')$ positiv und monoton wachsend mit jeder der beiden Variabeln x, x'. Daher folgt aus (58)

$$0 \leqq I(\delta, \delta') \leqq F(x+\delta, x'+\delta') - F(x, x'),$$

also mit (5) und (4)

$$(65) \qquad \begin{aligned} |I(\delta, \delta')| &\leqq \sum_{\substack{x \leqq \mu < x+\delta \\ 0 < \mu' < x'}} f(\mu) + \sum_{\substack{0 < \mu < x \\ x' \leqq \mu' < x'+\delta'}} f(\mu) + \sum_{\substack{x \leqq \mu < x+\delta \\ x' \leqq \mu' < x'+\delta'}} f(\mu) \\ &\leqq C\,\{\delta x' + (xx')^{\frac{1}{2}} + x\delta' + (xx')^{\frac{1}{2}} + \delta\delta' + (xx')^{\frac{1}{2}}\}; \end{aligned}$$

denn es ist z. B. mit einer total-positiven Einheit $\eta = \eta_1^n > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \leqq \mu < x+\delta \\ 0 < \mu' < x'}} f(\mu) &\leqq \sum_{\substack{x \leqq \mu < x+\delta \\ 0 < \mu' < x'}} 1 = \sum_{\substack{x\eta \leqq \mu\eta < x\eta+\delta\eta \\ 0 < \mu'\eta' < x'\eta'}} 1 = \sum_{\substack{x\eta \leqq \mu^* < x\eta+\delta\eta \\ 0 < \mu^{*\prime} < x'\eta'}} 1 \\ &\leqq \delta\eta x'\eta' + C'(\delta\eta + x'\eta') \leqq \delta x' + C'(x\eta + x'\eta') \\ &\leqq \delta x' + C''(xx')^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

für passendes η, da sich stets ein n mit $\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \eta_1^n < \eta_1 \left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ zu gegebenen x, x' finden läßt. Wir haben dabei berücksichtigt, daß die ganzen Zahlen μ bzw. μ^* aus K ein Punktgitter bilden und daß daher ihre Anzahl in einem Rechteck gleich einem Vielfachen seines Flächeninhaltes ist mit einem Fehler, der höchstens von der Größenordnung der Länge des Randes ist. Aus (65) und (61) folgt nun sofort (63).

Weiter zum Beweis von (64): Da die drei Integrale

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{(xx')^{s+1} \operatorname{Log}(s-1)}{s^2(s+1)^2}\, ds, \quad \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^s x'^{s+1} \operatorname{Log}(s-1)}{s^2(s+1)}\, ds, \quad \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{(xx')^s \operatorname{Log}(s-1)}{s^2}\, ds$$

mit für $\sigma > 1$ und alle $x, x' > 0$ regulären Integranden ersichtlich gleichmäßig für $0 < x, x' \leqq M < \infty$ konvergieren, folgt aus (60)

$$(66) \qquad \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial y'} H(y, y')\Big|_{(x, x')} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{(xx')^s \operatorname{Log}(s-1)}{s^2}\, ds, \quad xx' \geqq 2.$$

Ferner liefert die Def. (57) des Operators Δ angewandt auf $H(x, x')$ nach (60), (59) und (66)

$$(67) \qquad D(\delta, \delta') = \frac{-1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{K(x; s) \operatorname{Log}(s-1)}{s^2(s+1)^2}\, ds$$

mit

$$(68) \qquad K(x; s) = \frac{1}{\delta\delta'}\, \Delta(xx')^{s+1} - (s+1)^2 (xx')^s.$$

Nach (57) gilt

$$\begin{aligned} \Delta(xx')^{s+1} &= (x+\delta)^{s+1}\{(x'+\delta')^{s+1} - x'^{s+1}\} - x^{s+1}\{(x'+\delta')^{s+1} - x'^{s+1}\} \\ &= \{(x+\delta)^{s+1} - x^{s+1}\} \cdot \{(x'+\delta')^{s+1} - x'^{s+1}\} \\ &= (s+1) \int_x^{x+\delta} u^s du \cdot (s+1) \int_{x'}^{x'+\delta'} u'^s du' = (s+1)^2 \int_{x'}^{x'+\delta'} \int_x^{x+\delta} (uu')^s\, du\, du', \end{aligned}$$

folglich mit (68) und (61) für beliebiges $s = \sigma + it$

$$|K(x;s)| = |s+1|^2 \cdot \left| \frac{1}{\delta\delta'} \int_{x'}^{x'+\delta'} \int_{x}^{x+\delta} (uu')^s \, du\, du' - (xx')^s \right|$$

$$= |s+1|^2 \cdot \left| \frac{1}{\delta\delta'} \int_{x'}^{x'+\delta'} \int_{x}^{x+\delta} \{(uu')^s - (xx')^s\} \, du\, du' \right|$$

$$\leqq |s+1|^2 \cdot \max_{\substack{x \leqq u \leqq x+\delta \\ x' \leqq u' \leqq x'+\delta'}} |(uu')^s - (xx')^s| \leqq |s+1|^2 \cdot \max_{\substack{x \leqq u \leqq x+\delta \\ x' \leqq u' \leqq x'+\delta'}} \left| s \int_{xx'}^{uu'} t^{s-1} dt \right|,$$

also für $1 < \sigma < 3$

$$\leqq |s+1|^2 \cdot |s| \cdot \max_{\substack{x \leqq u \leqq x+\delta \\ x' \leqq u' \leqq x'+\delta'}} \{(uu')^{\sigma-1} (uu' - xx')\},$$

bzw. auch für $0 < \sigma < 3$

$$\leqq |s+1|^2 \cdot |s| \cdot C \cdot (xx')^{\sigma-1} \{(x+\delta)(x'+\delta') - xx'\},$$
$$\leqq C \cdot |s| \cdot |s+1|^2 \cdot (xx')^{\sigma-1} (x\delta' + \delta x' + \delta\delta'),$$

folglich

$$(69) \qquad |K(x;s)| \leqq C_1 \cdot |s| \cdot |s+1|^2 \cdot (xx')^\sigma e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log X}}, \quad 0 < \sigma < 3.$$

Man liest hierunter auch leicht ab, daß für $0 < \sigma < 3$ und $xx' \geqq 2$

$$(70) \qquad |K(x;s)| \leqq C\, |s+1|^2 (xx')^\sigma$$

gilt; sowie aus (68), daß $K(x;s)$ eine ganze Funktion von s ist. Aus (67) folgt, durch Änderung der Contour nach dem Cauchyschen Integralsatz, also mit $\sigma_0 = 1 + \frac{1}{X} < 2$

$$-2\pi i\, D(\delta, \delta') = \left\{ \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}-2i} + \int_{\frac{1}{2}-2i}^{\sigma_0-2i} + \int_{\sigma_0-2i}^{\sigma_0+2i} + \int_{\sigma_0+2i}^{\frac{1}{2}+2i} + \int_{\frac{1}{2}+2i}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{K(x;s)\,\mathrm{Log}(s-1)}{s^2(s+1)^2}\, ds \right\},$$

oder

$$(71) \qquad -2\pi i\, D(\delta, \delta') = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5;$$

denn es verschwinden die Integrale über die im Unendlichen gelegenen horizontalen Strecken der Länge $l < 2$, da nach (70) der Integrand im Nenner von 2. Ordnung in t bleibt bei festem xx'. Nun ist wegen (70) für $X \geqq 2$

$$(72) \qquad |J_1| \leqq C X^{\frac{1}{2}} \int_2^\infty \frac{\log(\frac{1}{2} + |t|)}{t^2}\, dt \leqq C_1 X^{\frac{1}{2}},$$

und ebenso

$$(73) \qquad |J_5| \leqq C_2 X^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner wird mit (69) und $\sigma_0 = 1 + \frac{1}{X}$

$$(74) \qquad |J_2| \leqq C X^{\sigma_0} e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log X}} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma_0} |\mathrm{Log}(\sigma - 1 + 2i)|\, d\sigma$$

$$\leqq C_1 X e^{\frac{1}{X}\log X - \frac{c}{2}\sqrt{\log X}} \leqq C_2 X e^{-c'\sqrt{\log X}},$$

und ebenso

$$(75)\qquad |J_4| \leqq C_2' X e^{-c'\sqrt{\log X}},$$

und

$$(76)\qquad \begin{aligned} |J_3| &\leqq C X^{\alpha_0} e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log X}} \int_{-2}^{+2} \left| \operatorname{Log}\left(\frac{1}{X} + ti\right)\right| dt \\ &\leqq C_1 X e^{\frac{1}{X}\log X - \frac{c}{2}\sqrt{\log X}} \log X \\ &\leqq C_2 X e^{-c'\sqrt{\log X}}, \end{aligned}$$

wobei diese Abschätzungen zunächst nur für $X > X_0$ gelten, nachträglich aber auch für $X \geqq 3$, wie man erkennt. Mit (71) bis (76) ist nun (64) ebenfalls gezeigt, so daß wir aus (62) und (66) auf

$$(77)\quad F(x, x') = \frac{1}{2h\varphi(\mathfrak{a})\log\varepsilon_0}\,\frac{-1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} X^s \operatorname{Log}(s-1)\frac{ds}{s^2} + O(Xe^{-c'\sqrt{\log X}})$$

schließen dürfen, falls $X \geqq 3$.

Zur Auswertung des hier auftretenden Integrals verschieben wir die Contour zur Abszisse $\alpha = \dfrac{\log 2}{\log X}$, wobei $0 < \alpha < 1$ für $X \geqq 3$ ist. Dabei haben wir dem Verzweigungspunkt $s = 1$ von $\operatorname{Log}(s-1)$ durch einen Hakenweg auszuweichen, den wir an die beiden Ufer der von 1 nach $-\infty$ längs der reellen Achse aufgeschnittenen s-Ebene heranziehen, jedoch so, daß der Punkt $s = 1$ selbst auf einem kleinen Kreis von Radius $\varepsilon > 0$ umgangen wird. Zur Rechtfertigung dieser Verschiebung sei nur bemerkt, daß ersichtlich die Integrale über die im Unendlichen gelegenen horizontalen Wegstücke verschwinden. Wegen $X^\alpha = 2$, $X \geqq 3$ ist nun $\alpha \leqq \dfrac{\log 2}{\log 3} = \text{const.} < 1$ und

$$(78)\qquad \begin{aligned} \left|\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} X^s \operatorname{Log}(s-1)\frac{ds}{s^2}\right| &\leqq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{Log}(\alpha-1+it)|\frac{dt}{|\alpha+it|^2} \leqq 4\int_0^3 \cdots + 4\int_3^\infty \cdots \\ &\leqq C_1\alpha^{-2} + C_2\int_3^\infty \log 2t\,\frac{dt}{t^2} \leqq C\log^2 X. \end{aligned}$$

Ferner wird für $0 < \varepsilon < 1$

$$(79)\qquad \left|\int_{\substack{|s-1|=\varepsilon \\ -\pi<\arg(s-1)<\pi}} X^s \operatorname{Log}(s-1)\frac{ds}{s^2}\right| < X^{1+\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{C\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \xrightarrow[(\varepsilon\to 0)]{} 0.$$

Zur Berechnung des noch verbleibenden Schleifenintegrals beachten wir, daß für $\sigma < 1$

$$\operatorname{Log}(s-1) = \begin{cases} \log(1-\sigma) + i\pi & \text{am oberen Ufer der reellen Achse} \\ \log(1-\sigma) - i\pi & \text{am unteren Ufer der reellen Achse} \end{cases}$$

gilt, so daß wir erhalten

$$(80)\quad \frac{-1}{2\pi i}\int_{\substack{\alpha\leqq\sigma<1-\varepsilon \\ \text{unteres Ufer}}} X^s \operatorname{Log}(s-1)\frac{ds}{s^2} + \frac{-1}{2\pi i}\int_{\substack{1-\varepsilon>\sigma\geqq\alpha \\ \text{oberes Ufer}}} X^s \operatorname{Log}(s-1)\frac{ds}{s^2} = \int_\alpha^{1-\varepsilon} X^\sigma\frac{d\sigma}{\sigma^2},$$

also, die letzten Überlegungen zusammenfassend, mit (78) bis (80) und der Substitution $X^\sigma = u$, $X \geqq 3$

$$(81) \qquad \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} X^s \operatorname{Log}(s-1) \frac{ds}{s^2} = \log X \int\limits_2^X \frac{du}{\log^2 u} + O(\log^2 X).$$

Da im vorangehenden stets die Gültigkeit von (16) vorausgesetzt und ξ durch (46) bestimmt war, folgt aus (77) und (81)

$$F(x, x') = \frac{\log X}{2h\varphi(\mathfrak{a}) \log \varepsilon_0} \int\limits_2^X \frac{du}{\log^2 u} + O(Xe^{-c\sqrt{\log X}})$$

gleichmäßig in $\mathfrak{a}$ für $N\mathfrak{a} \leqq \log^l X$, $X \geqq 3$, $l \geqq 1$.

Abschließend folgt hieraus mit (3) und (5) und $X = xx'$ der in der Einleitung angekündigte Satz.

Eingegangen 15. September 1956.

Berichtigungen zur Arbeit İçen

„Eine Verallgemeinerung und Übertragung der Schneiderschen Algebraizitätskriterien usw."

Journ. f. d. r. u. a. Math. Bd. 198, Heft 1/2, S. 28—55

Seite 36, Zeile 13 von unten: statt „$\log h_\nu$" lies „$\log \underline{h_\nu}$"

Seite 36, Zeile 2 von unten: statt „$\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \log h'_\nu\right)/n \log h'_{n+1}$" lies „$\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \log \underline{h'_\nu}\right)/n \log h'_{n+1}$"

Seite 44, Zeile 6 von unten: statt „o" lies „O"

Seite 44, Zeile 5 von unten: statt „O" lies „o"

Seite 45, Zeile 4 : statt „$\log \sigma_n$" lies „$\log H_n$"

Seite 45, Zeile 23 : statt „$K_n^{(k)}$ lies „$H_n^{(k)}$"

Seite 45, Zeile 26 : statt „o" lies „O"

Seite 45, Zeile 28 : statt „O" lies „o"

Seite 45, Zeile 29 : statt „o" lies „O"

Seite 45, Fußnote : statt „$O(\nu)^{\frac{1}{2}}$" lies „$o(\nu^{\frac{1}{2}})$"